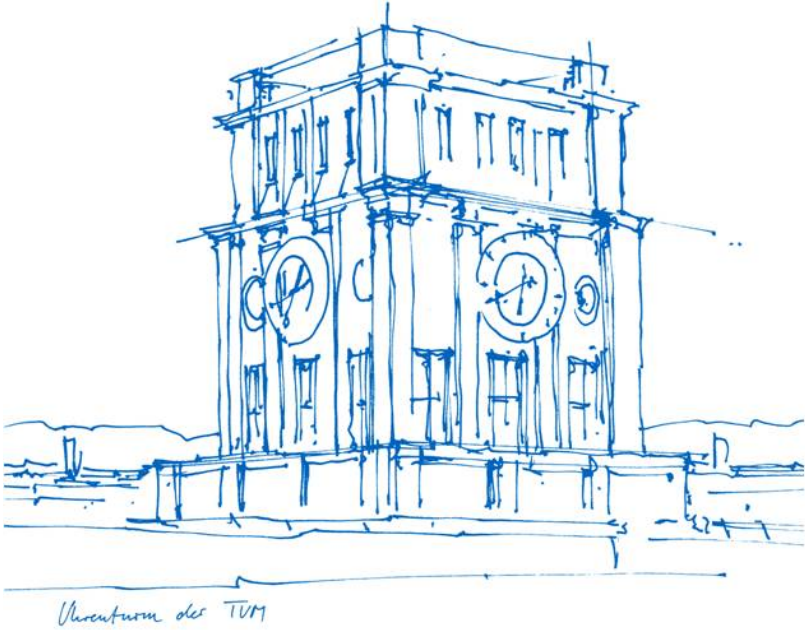
Lineare Algebra für Informatiker – Tutorium KW 29

Jeremias Bohn

Technische Universität München

Fakultät für Mathematik

Garching, 15./16. Juli 2021



Gram-Schmidt‘sches Orthogonalisierungsverfahren

Das Gram-Schmidt‘sche Orthogonalisierungsverfahren wird angewendet, um zu einem Unterraum $U \subseteq K^n$ eine sogenannte **Orthonormalbasis** zu berechnen, also eine Basis, die ein Orthonormalsystem ist.

Input: Eine Menge Vektoren $S = \{v_1, \dots, v_k\}$, sodass gilt: $U = \langle S \rangle$

Algorithmus:

1. Setze $m := 0$
2. Für $i = 1, \dots k$:
   1. Setze $w_i := v_i - \sum_{j=1}^{m} \langle u_j, v_i \rangle \cdot v_i$
   2. Falls $w_i \neq 0$:
      1. $m := m + 1$
      2. $u_m := \frac{1}{|w_i|} \cdot w_i$

Output: Eine Orthonormalbasis $\{u_1, \dots, u_m\}$ zum Unterraum U

Allgemeine und Spezielle Lineare Gruppe

Eine quadratische Matrix $A \in K^{n \times n}$ heißt regulär, falls gilt:

$$rng(A) = n$$

Wir definieren folgend die allgemeine lineare Gruppe $GL_n(K) \coloneqq \{A \in K^{n \times n} \mid rng(A) = n\}$.

Die spezielle lineare Gruppe $SL_n(K) \coloneqq GL_n(K) \cap \{A \in K^{n \times n} \mid \det(A) = 1\}$ ist die Menge der regulären Matrizen, deren Determinante 1 ist.

Jede Matrix $A \in GL_n(K)$ ist invertierbar.

(Spezielle) Orthogonale Gruppe

Eine quadratische Matrix $A \in K^{n \times n}$ heißt orthogonal, falls gilt:

$$A^T \cdot A = I_n$$

Wir definieren folgend die orthogonale Gruppe $O_n(K) \coloneqq \{A \in K^{n \times n} \mid A^T \cdot A = I_n\}$.

Die spezielle orthogonale Gruppe $SO_n(K) \coloneqq O_n(K) \cap SL_n(K)$ ist der Schnitt zwischen der speziellen linearen Gruppe (Matrizen mit Determinante 1) und der orthogonalen Gruppe.

Für $A \in O_n(K)$ und $v, w \in K^n$ gilt

$$\langle Av, Aw \rangle = \langle v, w \rangle$$

Jede Matrix der speziellen orthogonalen Gruppe ist eine Rotationsmatrix, d.h. der Vektor wird um den Ursprung gedreht.

Ausblick: Affine Gruppe

Eine quadratische Matrix $A \in K^{(n+1)\times(n+1)}$ heißt affin, falls sie eine bijektive, affine Transformation widerspiegelt.

Dies bedeutet, dass $\binom{v'}{1} = A \cdot \binom{v}{1}$ für alle $v \in K^n$ gilt mit $v' = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \cdot v + \begin{pmatrix} a_{1,(n+1)} \\ \vdots \\ a_{n,(n+1)} \end{pmatrix}$

Die affine Gruppe ist damit definiert als $AGL_n(K) = \left\{A \in K^{(n+1)\times(n+1)} \mid \exists A' \in K^{n\times n}, v \in K^n \colon A = \begin{pmatrix} A' & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$

Der Vektor $\binom{v}{1}$ ist dabei eine Erweiterung zu sog. **homogenen Koordinaten** und es gilt $\binom{v}{1} \equiv n \cdot \binom{v}{1}$.

Anwendung:

Projektive Geometrie, Computergrafik, Maschinelles Lernen