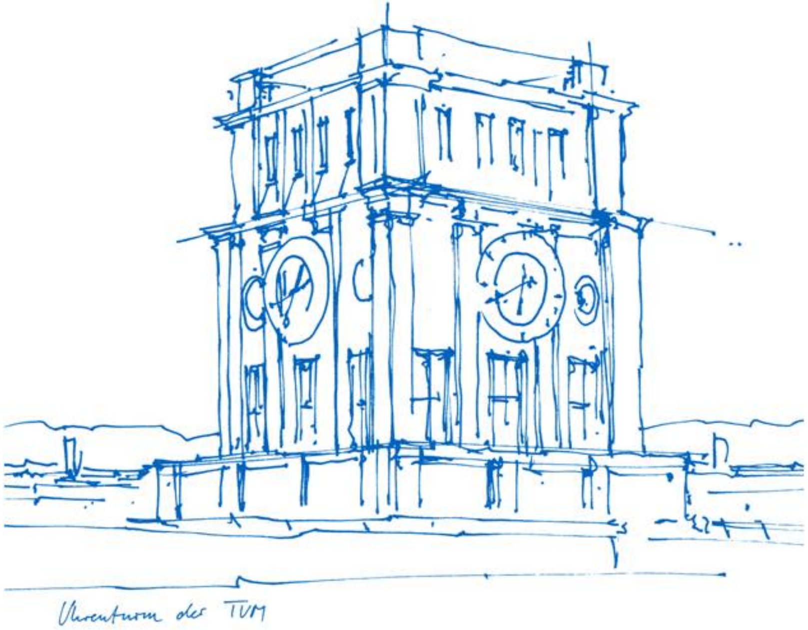
Lineare Algebra für Informatiker – Tutorium KW 28

Jeremias Bohn

Technische Universität München

Fakultät für Mathematik

Garching, 08./09. Juli 2021



Quiz

https://jeremias-bohn.de/la/21/quiz/?quizid=394804947

Hauptachsentransformation

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische Matrix, d.h. $\forall i, j$: $a_{ij} = a_{ji}$ bzw. $A = A^T$ (eine symmetrische Matrix lässt sich aus einer beliebigen Matrix $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mittels $B^T B$ konstruieren). Dann gibt es eine orthogonale Matrix S (d.h. es gilt $S^{-1} = S^T$), sodass $S^T A S$ eine Diagonalmatrix ist.

- Daraus folgt, dass die Spalten aus S eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^n$ aus Eigenvektoren von A bilden
- Zur Bestimmung der Eigenräume lassen sich teilweise „Abkürzungen“ nehmen, da sich die Eigenschaft der Orthogonalität ausnutzen lässt

Singulärwertzerlegung (SVD)

Die Diagonalisierung erlaubt es uns, u.a. wiederkehrende Matrixberechnungen zu beschleunigen

- Nachteil: Die Matrix muss quadratisch sein!

Idee: Konstruiere für eine beliebige Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ die Matrix $A^T A$

- Diese Matrix ist eine symmetrische Matrix und folglich gilt für eine Matrix $V = (v_1 | \dots | v_m) \in O_m(\mathbb{R})$, dass $V^T A^T A V$ eine Diagonalmatrix $\begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$ ist (berechne V mittels Hauptachsentransformation)
- Wähle nun $k = \max\{i \mid \lambda_i > 0\}$ und setze für $i \in \{1, \dots, k\}$: $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$
- Berechne für $i \in \{1, \dots, k\}$: $u_i = \frac{1}{\sigma_i} \cdot A \cdot v_i$ und ergänze $\{u_1, \dots, u_k\}$ zu einer Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$ und bilde $U = (u_1 | \dots | u_n) \in O_n(\mathbb{R})$

Singulärwertzerlegung (SVD) (ff.)

Wir können nun die Matrix $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}$ bilden, die auf ihren Diagonaleinträgen die Singulärwerte σ_i trägt, ergänzt um 0 für alle Diagonaleinträge i mit $i > k$ und es gilt

$$A = U\Sigma V^T$$

- Dies ist nur eine Möglichkeit, U und V zu bilden, diese sind in der Regel nicht eindeutig bestimmt
- Die Singulärwerte sind hingegen eindeutig
- Die Singulärwertzerlegung ist eine der am häufigsten vorausgesetzten Algorithmen in fortführenden Vorlesungen im Informatikstudium an der TUM (insbesondere im Master)
- Anwendungsgebiete sind beispielsweise Datenkompression, Computer Vision und Datenanalyse