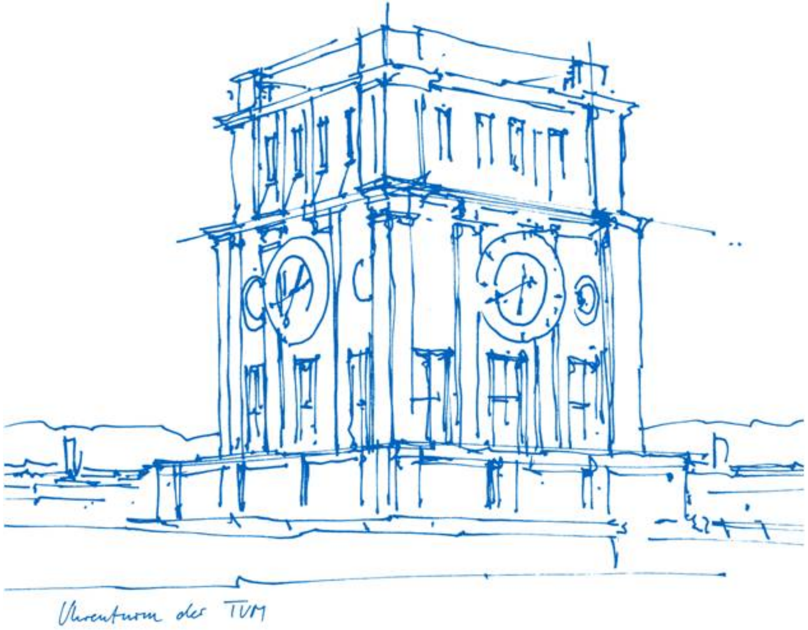
Lineare Algebra für Informatiker – Tutorium KW 26

Jeremias Bohn

Technische Universität München

Fakultät für Mathematik

Garching, 24./25. Juni 2021



Quiz

https://jeremias-bohn.de/la/21/quiz/?quizid=814118519

Eigenwerte und -vektoren

Ein Vektor $v \in K^n$ heißt **Eigenvektor** zur Matrix $A \in K^{n \times n}$, wenn für ein beliebiges $\lambda \in K$ gilt:

$$A \cdot v = \lambda \cdot v$$

Der Vektor v wird also durch die Matrix A also nur **verlängert**, behält aber seine Richtung bei!

Das Skalar λ wird dann als der zugehörige Eigenwert bezeichnet.

Anwendungen:

- Principal Component Analysis: Dimensionsreduktion, z.B. in Data Science, Machine Learning, Kompression
- Markow-Ketten (siehe Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie (IN0018))
- Google PageRank

Charakteristisches Polynom

Wir können die Eigenwerte einer Matrix $A \in K^{n \times n}$ berechnen, indem wir das Gleichungssystem

$$A \cdot x = \lambda \cdot x \quad \text{bzw.} \quad (\lambda I_n - A) \cdot x = 0$$

Nach λ auflösen. Dafür können wir das charakteristische Polynom $\chi_A(\lambda)$ aufstellen:

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$$

Alle λ, für die $\chi_A(\lambda) = 0$ gilt, sind Eigenwerte.

Eigenräume

Nun da wir die Eigenwerte unserer Matrix berechnet haben, wollen wir auch die dazugehörigen Eigenvektoren berechnen.

Wenn v ein Eigenvektor der Matrix A mit Eigenwert λ ist, dann ist $\mu \cdot v$ für alle $\mu \in K$ auch ein Eigenvektor von A, denn es gilt:

$$A \cdot \mu \cdot v = \mu \cdot A \cdot v = \mu \cdot \lambda \cdot v = \lambda \cdot (\mu \cdot v)$$

Wir berechnen also den Eigenraum zum Eigenwert λ, indem wir folgendes lineares Gleichungssystem lösen:

$$\lambda I_n - A = 0$$

Algebraische und geometrische Vielfachheit

Die algebraische und geometrische Vielfachheit sind wichtige Kennzahlen eines Eigenwertes.

Algebraische Vielfachheit $m_a(\lambda)$:

- Gibt an, wie viele Male der Eigenwert λ im charakteristischen Polynom vorkommt
- Beispiel: $\chi_A(\lambda) = (\lambda - 1)^2 \Rightarrow m_a(1) = 2$

Geometrische Vielfachheit $m_g(\lambda)$:

- Gibt an, wie viele Vektoren sich in der Basis vom zugehörigen Eigenraum befinden

Grundsätzlich gilt: $1 \leq m_g\ (\lambda) \leq m_a(\lambda) \leq n$

Diagonalisierung

Eine Matrix $A \in K^{n\times n}$ ist diagonalisierbar, wenn für alle Eigenwerte λ gilt:

$$m_g(\lambda) = m_a(\lambda)$$

Gilt dies, können wir eine Diagonalisierung anwenden:

- Die Diagonalmatrix $D \in K^{n\times n}$ ist die Einheitsmatrix, wobei jede Spalte mit einem Eigenwert multipliziert wird (für jeden Eigenwert λ gibt es $m_a(\lambda)$ Spalte)
- die Matrix $S \in K^{n\times n}$ enthält in ihren Spalten die Eigenvektoren, die zum jeweiligen Eigenwert in der korrespondierenden Spalte in D gehören (jeder Basisvektor der Eigenräume muss genau einmal vorkommen!)
- Es gilt dann $A = SDS^{-1}$, D ist also ähnlich zur Matrix A.
- Die Diagonalmatrix D ist also eine Darstellungsmatrix zur „Eigenbasis“ des K^n bezüglich der Matrix A, S ist die Basiswechselmatrix von der „Eigenbasis“ zur Standardbasis

Komplexe Zahlen

Der Raum der komplexen Zahlen, bezeichnet mit $\mathbb{C}$, ist eine Erweiterung der reellen Zahlen, der eine weitere Dimension, den imaginären Teil, beinhaltet.

- Eine komplexe Zahl $z = a + bi \in \mathbb{C}$ ist definiert durch ihren reellen Teil $Re(z) = a$ und ihren imaginären Teil $Im(z) = b$
- Besonderheit der komplexen Zahlen ist die imaginäre Zahl i. Es gilt $i^2 = -1$.
- Sei $z = a + bi \in \mathbb{C}$. Dann heißt $\bar{z} = a - bi \in \mathbb{C}$ die **komplex Konjugierte zu $\boldsymbol{z}$**.
- Der Betrag einer komplexen Zahl ist gegeben als $|z| = z \cdot \bar{z}$.

Recap: Linearfaktorzerlegung

Für jede rationale ($\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$) Nullstelle der Polynomfunktion

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

gilt $ggT(a, b) = 1$ und $|a|$ ist Teiler von $|a_0|$ und $|b|$ ist Teiler von $|a_n|$