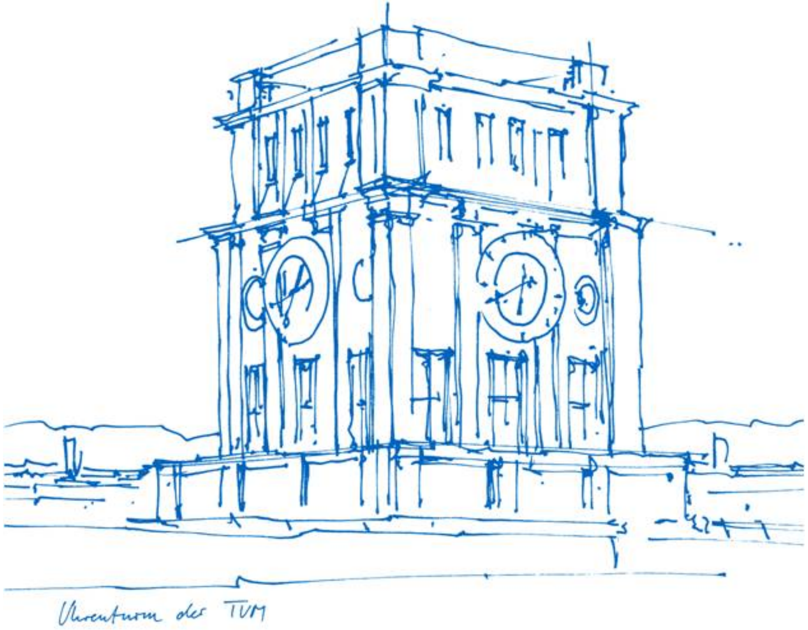
Lineare Algebra für Informatiker – Tutorium KW 25

Jeremias Bohn

Technische Universität München

Fakultät für Mathematik

Garching, 17./18. Juni 2021



Skalarprodukt

Seien $v, w \in K^n$.

Dann heißt $\langle v, w\rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i = v^t w$ das **Standard-Skalarprodukt** von v und w.

Ist $\langle v, w\rangle = 0$ so sind die beiden Vektoren orthogonal zueinander.

Es gelten die folgenden Regeln:

- Bilinearität:

$$\langle u, v + aw\rangle = \langle u, v\rangle + a \cdot \langle u, w\rangle \quad \text{bzw.} \quad \langle u + aw, v\rangle = \langle u, v\rangle + a \cdot \langle w, v\rangle$$

- Symmetrie:

$$\langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle$$

- Unausgeartetheit:

$$(K^n)^{\perp} = \{0\}$$

Wichtige Eigenschaften von Vektoren

Seien $v, w \in \mathbb{R}^n,\ a \in \mathbb{R}$.

- $\|v\| := \sqrt{\langle v, v\rangle}$ nennen wir die (euklidsche) **Länge** von v
- Es gilt die Dreiecksungleichung $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$
- Es gilt $\|a \cdot v\| = |a| \cdot \|v\|$
- Es gilt die Ungleichung von Cauchy-Schwarz $|\langle v, w\rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|$ bzw. $|\langle v, w\rangle|^2 \leq \langle v, v\rangle \cdot \langle w, w\rangle$
- Sei α der Winkel zwischen v und w. Dann gilt $\langle v, w\rangle = \|v\| \cdot \|w\| \cdot \cos\alpha$

Orthogonales Komplement

Das orthogonale Komplement für $U \subseteq K^n$

$$U^\perp = \{v \in K^n \mid \forall u \in U\colon \langle u, v \rangle = 0\}$$

ist die Menge der Vektoren, die zu **ALLEN** Vektoren in U orthogonal ist.

Vorsicht bei Körpern, die nicht der $\mathbb{R}$-Körper sind!

Determinante

Die Determinante einer quadratischen Matrix gibt die Orientierung (Vorzeichen) und das Volumen an, dass durch den Spat der Spaltenvektoren der Matrix erzeugt wird.

- Wichtige Rechenregeln (es gilt $A, B \in K^{n \times n}, \lambda \in K$):

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

$$\det(A^T) = \det(A)$$

$$\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}, \text{falls } \det(A) \neq 0$$

$$\det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \cdot \det(A)$$

Determinanten für Matrizen bis $n = 2$

Für Matrix $A \in K^{0\times 0}$:

$$\det(A) = 1$$

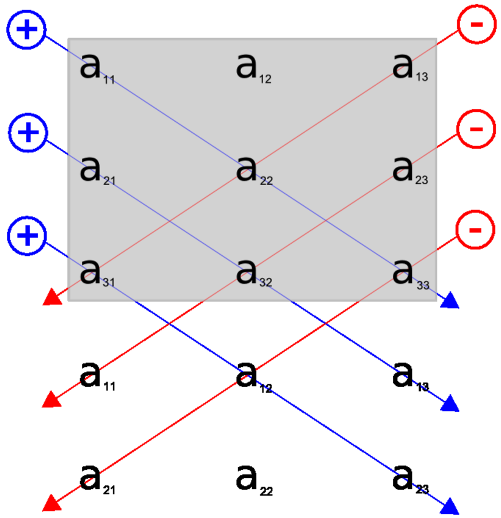
Für Matrix $A \in K^{1\times 1}$:

$$\det(A) = a_{1,1}$$

Für Matrix $A \in K^{2\times 2}$:

$$\det(A) = a_{1,1} \cdot a_{2,2} - a_{1,2} \cdot a_{2,1}$$

Determinante für Matrizen in $K^{3\times 3}$ (Sarrus-Regel)



Laplace‘scher Entwicklungssatz

Mit dem Laplace‘schen Entwicklungssatz können wir die Determinanten beliebiger Matrizen berechnen

- Wir „entwickeln" nach einer spezifischen Zeile oder einer Spalte
- Wir brechen die Determinante einer $K^{n \times n}$-Matrix in mehrere Determinanten von Matrizen in $K^{(n-1)\times(n-1)}$ auf
- Formel (wir fixieren eine beliebige Spalte j oder Zeile i):

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{i,j} \cdot \det(A_{ij}) \quad \text{bzw.} \quad \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{i,j} \cdot \det(A_{ij})$$

- Wir versuchen hierbei, eine Spalte bzw. Zeile möglichst geschickt zu wählen, sodass $a_{i,j}$ möglichst oft 0 ist (reduziert die Anzahl von Werten, die wir berechnen müssen)

Determinanten von besonderen Matrizen

In den folgenden Sonderfällen können wir die Determinante einfacher berechnen:

- Sei $A \in K^{n \times n}$ eine obere bzw. untere Dreiecksmatrix. Dann gilt:

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}$$

- Sei $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in K^{n \times n}$ eine Blockmatrix mit A, D quadratische Matrizen und entweder B oder C eine Nullmatrix. Dann gilt:

$$\det(X) = \det(A) \cdot \det(D)$$

Determinanten unter Zeilenoperationen

Sei $A \in K^{n\times n}$ und $\mathrm{A}' \in K^{n\times n}$ eine Matrix, die durch elementare Zeilen- bzw. Spaltenoperationen aus A hervorgegangen ist

- **Vertauschen von zwei Zeilen/Spalten**: Es gilt $\det(A') = (-1) \cdot \det(A)$
- **Skalieren einer Zeile/Spalte**: Für den Skalierungsfaktor s gilt $\det(A') = s \cdot \det(A)$
- **Addieren einer Zeile/Spalte auf eine andere**: Es gilt $\det(A') = \det(A)$

Diese Regeln sind besonders in Kombination mit der Determinantenregel für obere bzw. untere Dreiecksmatrizen nützlich!