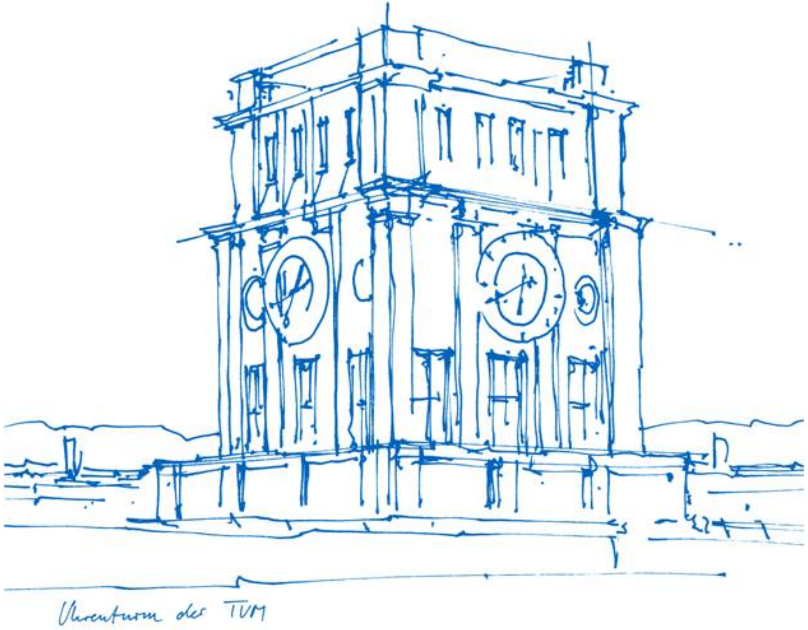
Lineare Algebra für Informatiker – Tutorium KW 24

Jeremias Bohn

Technische Universität München

Fakultät für Mathematik

Garching, 10./11. Juni 2021



Quiz

https://jeremias-bohn.de/la/21/quiz/?quizid=16135536

Basiswechselmatrix

Sei V ein Vektorraum und B, C Basen von V. Dann nennt man T_C^B die Basiswechselmatrix, die Vektoren, die zur Basis B dargestellt sind, in Vektoren, die zur Basis C dargestellt sind, umwandelt.

- Beispiel: Sei $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ und $B = \{1,\ x,\ x^2\}, C = \{1,\ x-1,\ x^2-1\}$.
  - Das Polynom $f = 1 + x + x^2$ dargestellt zur Basis B ist $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und zur Basis C

$$T_C^B \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \triangleq 3 \cdot (1) + 1 \cdot (x-1) + 1 \cdot (x^2 - 1) = 1 + x + x^2$$

- Die Basiswechselmatrix T_C^B ist identisch zur **Darstellungsmatrix** $M_C^B(\varphi)$, wenn φ die Identitätsfunktion ist
- Besondere Relevanz in der Informatik: Computer Vision, Computergrafik

Rechenregeln für Basiswechselmatrizen

Grundsätzlich gilt $T_C^B = (T_B^C)^{-1}$ für zwei beliebige Basen B, C eines Untervektorraumes V.

Sei nun $\varphi: V \to W$ eine lineare Abbildung und V, W Vektorräume mit jeweils zwei Basen B, B' bzw. C, C'.

Dann gilt allgemein:

$$T_{C'}^{C} \cdot M_C^B(\varphi) \cdot T_B^{B'} = M_{C'}^{B'}(\varphi)$$

Da der Input für $M_{C'}^{B'}(\varphi)$ in B' gegeben ist, konvertieren wir die Vektoren in B' zuerst zur Basis B mittels $T_B^{B'}$, damit sie für $M_C^B(\varphi)$ gültige Eingaben sind. Der Output von $M_C^B(\varphi)$ ist dann zur Basis C gegeben. Da dieser für $M_{C'}^{B'}(\varphi)$ in C' sein soll, konvertieren wir diesen wiederum zur Basis C' mittels $T_{C'}^{C}$.

Ähnlichkeit und Äquivalenz

Zwei Matrizen $A, B \in K^{m \times n}$ heißen äquivalent, falls es $S \in K^{n \times n}, T \in K^{m \times m}$ gibt (und S, T invertierbar), sodass $B = T^{-1}AS$ gilt.

Analog heißen zwei Matrizen $A, B \in K^{n \times n}$ ähnlich, falls es eine Matrix $S \in K^{n \times n}$ gibt (und S invertierbar), sodass $B = S^{-1}AS$ gilt.