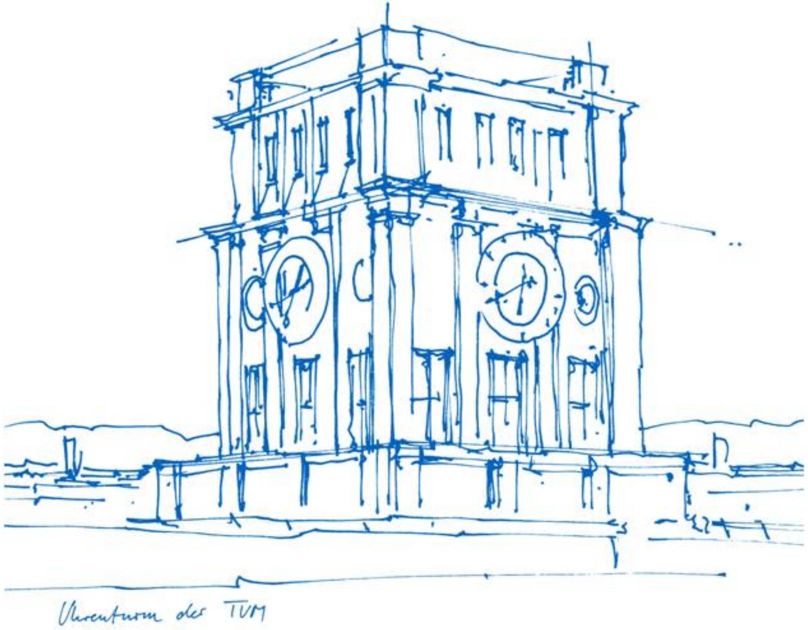
Lineare Algebra für Informatiker – Tutorium KW 23

Jeremias Bohn

Technische Universität München

Fakultät für Mathematik

Garching, 04. Juni 2021



Lineare Fortsetzung

Sei $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ Basis von V und $c_1, \dots, c_n$ beliebige Vektoren aus W. Dann existiert

$$\varphi: V \to W, \qquad \varphi(b_i) = c_i \ \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

Mit diesem Kriterium lässt sich schnell für gegebene Stützstellen überprüfen, ob eine zugehörige Funktion linear ist oder nicht und ob diese eindeutig ist.

Darstellungsmatrix

Sei $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ Basis von V und $C = \{c_1, \dots, c_m\}$ Basis von W, außerdem ist

$$\varphi: V \to W, \qquad \varphi(b_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} c_i \ \forall j \in \{1, \dots, n\}$$

Dann nennen wir $M_C^B(\varphi) := \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ die Darstellungsmatrix von φ bezüglich der Basen B und C. Ist $V = W$ und $B = C$, so schreiben wir auch $M_C(\varphi) = M_C^C(\varphi)$.

Vorsicht mit der Notation! $M_C^B(\varphi)$ ist die Darstellungsmatrix des **Outputs** bezüglich Basis C, wenn der **Input** bezogen auf Basis B war!

Inverses einer Matrix

Eine **quadratische** Matrix $\mathrm{A} \in K^{n \times n}$ ist invertierbar, falls es eine Matrix $\mathrm{B} \in K^{n \times n}$ gibt, sodass

$$A \cdot B = I_n$$

gilt. B wird dann auch als A^{-1} bezeichnet.

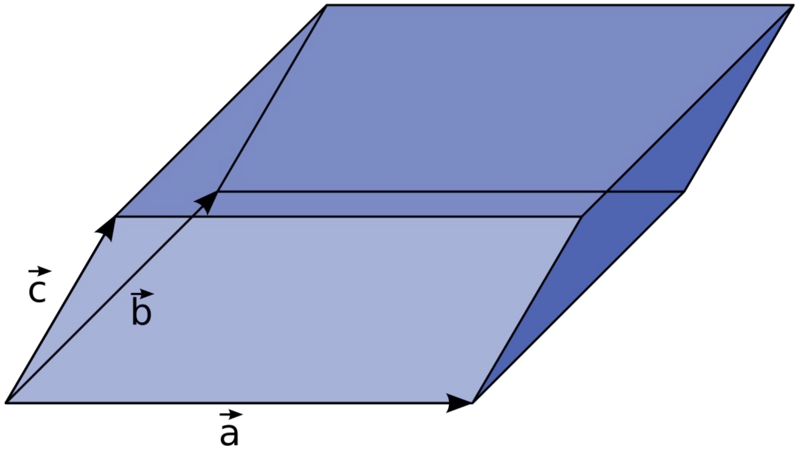
Damit A invertierbar ist, muss $rang(A) = n$ gelten!

Verfahren zur Bestimmung des Inversen mittels **Gauß-Jordan-Algorithmus**:

Stelle $(A \mid I_n)$ auf und führe diese in die reduzierte Stufenform (d.h. für ein A mit Rang n in die Identitätsmatrix auf der linken Seite) über. Die Matrix auf der rechten Seite entspricht dann dem Inversen A^{-1}.

Ausblick: Determinante

Die Determinante gibt an, wie eine lineare Abbildung die Inputvektoren verzerrt, d.h. um welchen Faktor sie das gerichtete Volumen des Inputs verändert. Für eine lineare Abbildung gegeben durch $A \in K^{n\times n}$, deren Rang $< n$ ist, ist die Determinante 0.



Für eine Abbildung $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in K^{2\times 2}$ gilt

$\det(A) = ad - bc$. Weitere Regeln für Determinanten kommen in der folgenden Woche.