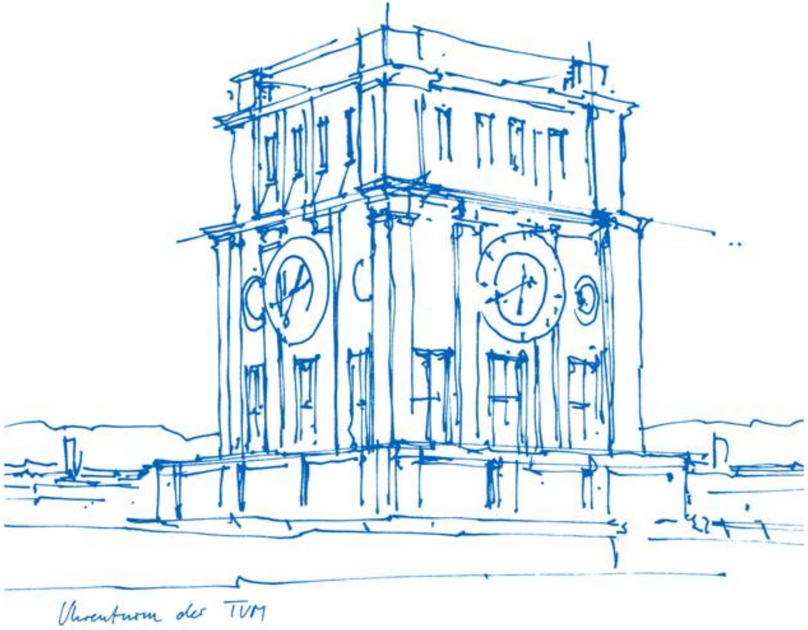
Lineare Algebra für Informatiker – Tutorium KW 22

Jeremias Bohn

Technische Universität München

Fakultät für Mathematik

Garching, 27./28. Mai 2021



Organisatorisches

Evaluation der Vorlesung und Übung

- Bitte füllt die Evaluation aus, um uns Feedback zu geben
- Vergesst nicht, die korrekte Übungsgruppe anzugeben. Diese ist 15 (Donnerstag) bzw. 21 (Freitag)

Feiertag

- Donnerstag, der 03.06.2021, ist ein Feiertag
- Bitte besucht ein anderes Tutorium
- Alternativtermin bei mir: Freitag, 04.06.2021, 16:00 – 17:30 Uhr, Gruppe 21
- Bitte besucht **NICHT** alle dieses Tutorium, da es sonst viel zu voll wird

Quiz

https://jeremias-bohn.de/la/21/quiz/?quizid=240961741

Lineare Abbildung

Seien V, W Vektorräume über dem gleichen Körper K. Dann heißt $\varphi: V \to W$ lineare Abbildung, wenn:

- $\forall v, v' \in V\colon\ \varphi(v + v') = \varphi(v) + \varphi(v')$
- $\forall v \in V, a \in K\colon\ \varphi(a \cdot v) = a \cdot \varphi(v)$

Daraus folgt insbesondere $\varphi(0) = 0$! Außerdem lassen sich die oben genannten Kriterien vereinfacht zusammengefasst mittels

$$\forall v, v' \in V, a \in K: \varphi(v + a \cdot v') = \varphi(v) + a \cdot \varphi(v')$$

überprüfen.

Kern und Bild

Sei $\varphi: V \to W$ eine lineare Abbildung.

Dann ist $\mathrm{Kern}(\varphi) \coloneqq \{v \in V \mid \varphi(v) = 0\}$ und $\mathrm{Bild}(\varphi) \coloneqq \varphi(V) = \{\varphi(v) \mid v \in V\}$.

Der Kern beschreibt also die Vektoren, die von φ auf 0 abgebildet werden, das Bild alle Vektoren, auf die φ abbildet.

Wichtig sei hier anzumerken, dass φ **injektiv** ist, wenn Kern$(\varphi) = \{0\}$ ist und **surjektiv**, falls $\dim\big(\mathrm{Bild}(\varphi)\big) = \dim(W)$. Kern und Bild sind zudem jeweils Unterräume von V bzw. W.

Dimensionssatz

Sei $\varphi: V \to W$ eine lineare Abbildung.

Dann gilt $\dim(V) = \dim(\mathrm{Kern}(\varphi)) + \dim(\mathrm{Bild}(\varphi))$.

Hieraus folgt außerdem, dass φ bijektiv und damit ein **Isomorphismus** ist, falls $\dim(V) = \dim(W)$ und $\mathrm{Kern}(\varphi) = \{0\}$. In diesem Falle existiert daher die **Umkehrfunktion** $\varphi^{-1}: W \to V$.

ACHTUNG! Nicht mit der Dimensionsformel verwechseln!