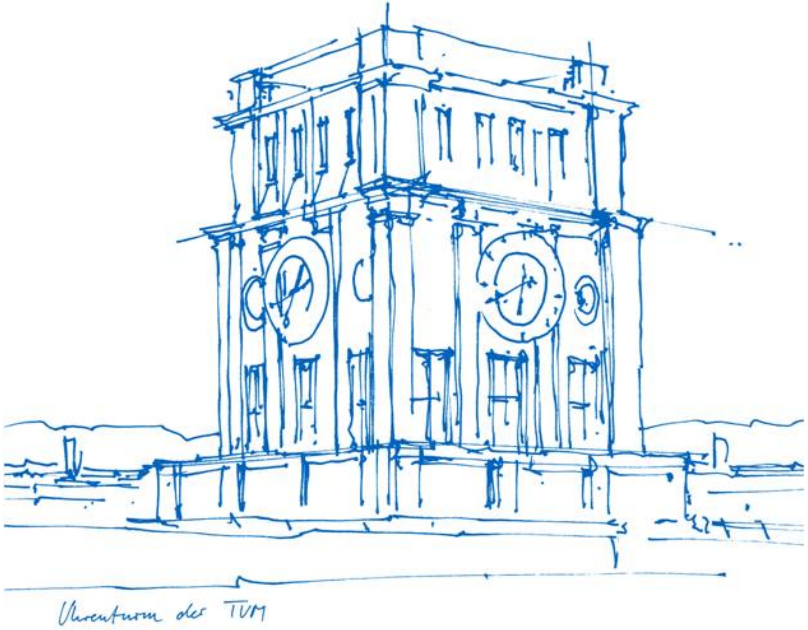
Lineare Algebra für Informatiker – Tutorium KW 20

Jeremias Bohn

Technische Universität München

Fakultät für Mathematik

Garching, 14. Mai 2021



Quiz

https://jeremias-bohn.de/la/21/quiz/?quizid=3136402

Dimension

Die Dimension eines Raumes ist gegeben durch die Anzahl der Vektoren, die maximal notwendig sind, um jeden Vektor in diesem Raum als Linearkombination zu bilden.

Informell entspricht dies der Anzahl der „Achsen“, die den Raum aufspannen.

- Allgemein gilt: Die Dimension eines Raumes ist die Mächtigkeit seiner Basis

Für zwei Unterräume $U, W \subseteq V$ gilt zudem die Dimensionsformel

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$$

Basisergänzungssatz

Sei $V \subseteq K^n$ ein **endlich-dimensionaler** (Unter-)Vektorraum und $S \subseteq V$ eine **linear unabhängige** Teilmenge. Dann existiert eine Basis B zu V mit $S \subseteq B$. B wird als **Basisergänzung** bezeichnet.

Insbesondere gilt damit für einen Untervektorraum U von V mit zugehöriger Basis A, dass es eine Basis B von V gibt mit $A \subseteq B$.

Recap: Polynomräume

Wir bezeichnen den Raum aller Polynome über einen Körper K mit $K[x]$. Dieser Körper enthält alle Polynome **beliebigen Grades**, d.h. $\sum_{i=0}^{m} a_i \cdot x^i \in K[x]$ für alle $a_i \in K, m \in \mathbb{N}_0$.

Jede Einschränkung auf einen Maximalgrad (z.B. $K[x]_{\leq 4}$ ist die Einschränkung auf alle Polynome mit maximal Grad 4) bildet einen Unterraum des Raumes $K[x]$.

Recap: Basis

Die Basis eines (Unter-)Vektorraumes ist eine Menge von linear unabhängigen Vektoren, die diesen Raum aufspannen. Für einen Vektorraum V und eine zugehörige Basis B gilt also:

- $\langle B \rangle = V$: Der Span der Vektoren bildet den Vektorraum
- $\sum_{b \in B} \lambda_b \cdot b = 0 \iff \forall b: \lambda_b = 0$: Die Vektoren sind linear unabhängig

Weiter gilt $\dim(V) = |B|$ für jede Basis B