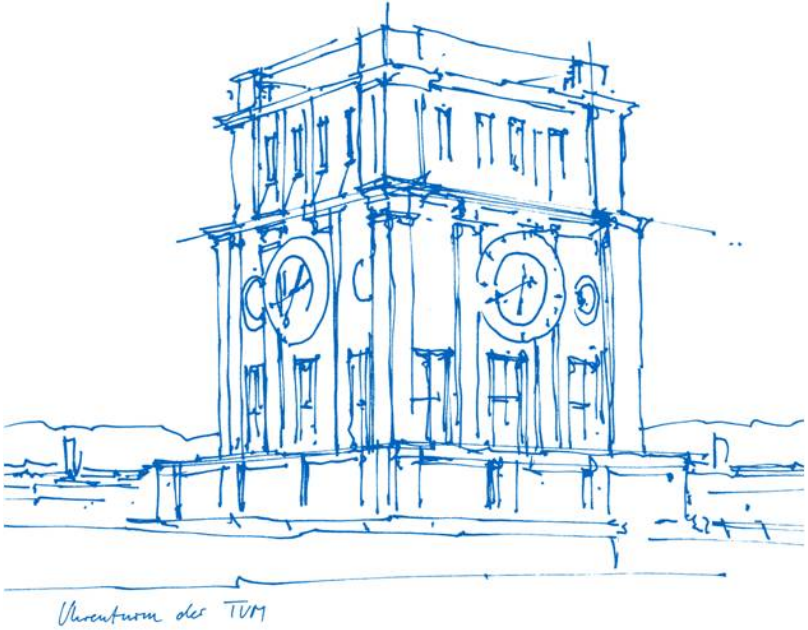
Lineare Algebra für Informatiker – Tutorium KW 19

Jeremias Bohn

Technische Universität München

Fakultät für Mathematik

Garching, 06./07. Mai 2021



Organisatorisches

- Donnerstag, der 13.05.2021, ist ein Feiertag
- Bitte besucht ein anderes Tutorium
- Alternativtermin bei mir: Freitag, 14.05.2021, 16:00 – 17:30 Uhr, Gruppe 21
- Bitte besucht **NICHT** alle dieses Tutorium, da es sonst viel zu voll wird

Quiz

https://jeremias-bohn.de/la/21/quiz/?quizid=298817234

Lineare Unabhängigkeit

Sei K ein Körper und $\mathrm{V} := K^n$ ein Vektorraum, $S \subseteq V$. Dann ist S **linear unabhängig**, wenn gilt:

$$\sum_{s \in S} \lambda_s \cdot s = 0 \Leftrightarrow \forall s\colon \lambda_s = 0$$

Das heißt es gibt keine Linearkombinationen einer beliebigen Teilmenge von S, die sich durch Linearkombinationen der restlichen Vektoren darstellen lassen.

Insbesondere gilt:

$$\max_{S \subseteq K^n,\, S \text{ lin. unabh.}} |S| = n$$

Basis

Sei K ein Körper und V ein Vektorraum über K. Dann heißt eine Menge S **Basis von $\boldsymbol{V}$**, wenn

- S ein **Erzeugendensystem** von V ist (also $\langle S \rangle = V$)
- Alle Vektoren in S **linear unabhängig** sind

Sei A eine **erweiterte Koeffizientenmatrix** eines **unterbestimmten** linearen Gleichungssystems mit $\mathrm{rng}(A) = m$ in einem n-dimensionalen Vektorraum.

- Es gibt $n - m$ freie Variablen, also wird der Lösungsraum von $n - m$ lin. unabh. Vektoren aufgespannt
- Wir lokalisieren die freien Variablen und setzen für jeden Basisvektor des Lösungsraumes eine freie Variable auf 1 und die restlichen auf 0 und berechnen dann die Lösung

Exkurs: Polynominterpolation

Satz von Lagrange: *„Für $n+1$ Stützstellen (a_i, b_i) gibt es exakt eine Polynomfunktion f von Grad $\leq n$“*

Lagranges Interpolationsformel:

- Wir berechnen zuerst die sogenannten **Lagrange-Polynome**:

$$\forall j \in 0, \ldots, n\colon\ L_j(x) := \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} \frac{x - a_i}{a_j - a_i}$$

- Damit gilt dann:

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j \cdot L_j(x)$$

- Vorteil des Verfahrens: Die Langrange-Polynome sind unabhängig von den Werten b_i, können also wiederverwendet werden!