

T36)

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 12 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda - 5)(\lambda + 2) - 144 = \\ (\lambda - 14)(\lambda + 11)$$

$$\Rightarrow \text{EW } \lambda_1 = 14, \lambda_2 = -11$$

$$E_{14}: \text{Kern} \left(\begin{pmatrix} 9 & -12 \\ -12 & 16 \end{pmatrix} \right) = \left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

E_{-11} : Suche einen Vektor, der
orthogonal auf $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ steht

$$\Rightarrow \langle v, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle = 0$$

$$4 \cdot v_1 + 3 \cdot v_2 = 0$$

$$v_1 = -3, v_2 = 4$$

$$\Rightarrow E_{-11} = \left\langle \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ normiert: } \frac{1}{\sqrt{4^2 + 3^2}} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ normiert: } \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left\{ \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\} \text{ ist eine Orthonormalbasis des } \mathbb{R}^2$$

aus Eigenvektoren von A

T37)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\chi_{A^T A}(\lambda) = (\lambda - 3)(\lambda - 1)$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1$$

$$E_3: \ker \left(\begin{pmatrix} 2-3 & 1 \\ 1 & 2-3 \end{pmatrix} \right) = \ker \left(\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$E_1: E_1 \perp E_3 \Rightarrow \langle v, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = 0, \text{ also } v_1 + v_2 = 0 \\ \Rightarrow E_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\Rightarrow v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow v = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_1 = \sqrt{3}, \sigma_2 = 1$$

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot A \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$u_2 = A \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$u_3 = u_1 \times u_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{12}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \cdot (-1) - 0 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 - (-1) \cdot 1 \\ 1 \cdot 0 - 1 \cdot 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A = U \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot V^T$$