

T30)

$$a) \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Eigenwert } 3$$

$$b) \chi_A(\lambda) = \det \left(\begin{pmatrix} \lambda-4 & 3 & -1 \\ -1 & \lambda & -1 \\ -1 & 2 & \lambda-3 \end{pmatrix} \right) \stackrel{R_3 \leftarrow R_3 - R_2}{=} \det \left(\begin{pmatrix} \lambda-4 & 3 & -1 \\ -1 & \lambda & -1 \\ 0 & 2-\lambda & \lambda-2 \end{pmatrix} \right) = (\lambda-2) \cdot \det \left(\begin{pmatrix} \lambda-4 & 3 & -1 \\ -1 & \lambda & -1 \end{pmatrix} \right) =$$

$$(\lambda-2) \cdot ((\lambda-4) \cdot \lambda \cdot 1 - 1 + 3 - \lambda + 4) = (\lambda-2) \cdot ((\lambda-4) \cdot \lambda - 1 + 6) =$$

$$(\lambda-2) \cdot ((\lambda-5) \cdot \lambda + 6) = (\lambda-2) \cdot (\lambda^2 - 5\lambda + 6) = (\lambda-2)(\lambda-2)(\lambda-3) = (\lambda-2)^2 \cdot (\lambda-3) \Rightarrow \text{EW: } \lambda_1=2, \lambda_2=3$$

c)

$$\lambda=2:$$

$$\text{Kern} \left(\begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \right) \stackrel{R_3 \leftarrow R_3 - R_2}{=} \text{Kern} \left(\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\lambda=3: \quad m_g(\lambda) \leq m_e(\lambda) \leq n \Rightarrow \text{aus a): } \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$d) \quad \frac{m_g(2) \stackrel{!}{=} m_e(2) \Rightarrow 1 \neq 2 \Rightarrow \text{d.h. } A \text{ ist nicht diagonalisierbar}}$$

$$m_g(3) \stackrel{!}{=} m_e(3) \Rightarrow 1=1$$

T31) 0 kann kein Eigenwert von A sein, weil A invertierbar ist

$$v \in K^n \setminus \{0\} \text{ mit } Av = \lambda v$$

$$A^{-1} \cdot Av = A^{-1} \cdot \lambda \cdot v$$

$$I_n \cdot v = \lambda \cdot A^{-1} \cdot v$$

$$v = \lambda \cdot A^{-1} \cdot v$$

$$\lambda^{-1} \cdot v = \lambda^{-1} \cdot \lambda \cdot A^{-1} \cdot v$$

$$\lambda^{-1} \cdot v = A^{-1} \cdot v$$

$$\langle u \times v, u \rangle =$$

T32) a) $(u_2 v_3 - u_3 v_2) \cdot u_1 + (u_3 v_1 - u_1 v_3) \cdot u_2 + (u_1 v_2 - u_2 v_1) \cdot u_3 =$

$$u_1 u_2 v_3 - u_1 v_2 u_3 + u_1 u_2 v_3 - u_1 u_2 v_3 + u_1 v_2 u_3 - u_1 v_2 u_3 =$$

$$\det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & u_1 \\ u_2 & v_2 & u_2 \\ u_3 & v_3 & u_3 \end{pmatrix}$$

b) $(u \times v) \perp u \Leftrightarrow \langle u \times v, u \rangle = 0$

$$\langle u \times v, u \rangle = \det(u | v | u) = 0$$

$\Rightarrow$ muss gelten, weil u lin. abh. von u ist

$$\langle u \times v, v \rangle = \det(u | v | v) = 0$$

$\Rightarrow$ muss gelten, weil v lin. abh. von v ist

c)

" $\Rightarrow$ " : $w \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ sodass $\{u, v, w\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist

$\Rightarrow \det(u|v|w) \neq 0$, da u, v, w lin. unabh.

$\Rightarrow \langle u \times v, w \rangle \neq 0$, aus a)

$\Rightarrow u \times v \neq 0$, da sonst $\langle u \times v, w \rangle$ auch 0 wäre

" $\Leftarrow$ " : $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit $\lambda u + \mu v = 0$

$\Rightarrow$ Das Kreuzprodukt ist bilinear, d.h.

$$0 = 0 \times v = (\lambda u + \mu v) \times v = \lambda \cdot \underbrace{(u \times v)}_{=0} + \mu \cdot \underbrace{(v \times v)}_{=0} = \lambda \cdot \underbrace{(u \times v)}_{\neq 0}$$

$\Rightarrow$ d.h. λ muss 0 sein

$\Rightarrow$ analog für $0 \times u \Rightarrow \mu = 0$

$$\lambda u + \mu v = 0 \Rightarrow \lambda = 0, \mu = 0$$

$\Rightarrow u, v$ sind lin. unabh.