

$$27) \quad u := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad w := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$a) \quad \|u - v\| = 2\sqrt{5}$$

$$\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(-1)^2 + (-4)^2} = \sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$$

$$b) \quad \alpha = 60^\circ \quad \langle u, w \rangle = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 = 1$$

$$\|u\| \cdot \|w\| \cdot \cos(\alpha) = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \cos \alpha$$

$$\Rightarrow 1 = 2 \cdot \cos(\alpha)$$

$$\Rightarrow \cos(\alpha) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3} \hat{=} 60^\circ$$

$$c) \quad U^\perp, \quad U = \langle u, v \rangle$$

$$U^\perp = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid \underbrace{\langle x, \lambda \cdot u + \mu \cdot v \rangle}_{\lambda \cdot \langle x, u \rangle + \mu \cdot \langle x, v \rangle} = 0 \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\underbrace{\lambda \cdot \langle x, u \rangle}_{=0} + \underbrace{\mu \cdot \langle x, v \rangle}_{=0}$$

(sonst können wir  $\lambda, \mu$  anders wählen und es gilt nicht mehr!)

$$\Rightarrow U^\perp = \{ x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle x, u \rangle = \langle x, v \rangle = 0 \}$$

$$= \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid \left\langle x, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle x, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \right\}$$

$$= \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot x = 0 \right\}$$

$$= \text{Kern} \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot J^{-1} \leadsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = U^\perp$$

$\Rightarrow$  Sei  $U$  ein UVR von  $K^n$ , aufgespannt durch die Vektoren  $u_1, \dots, u_m$   
 $\Rightarrow$  Schreibe  $u_1, \dots, u_m$  als Zeilenvektoren in eine Matrix. Der Kern dieser ist  $U^\perp$

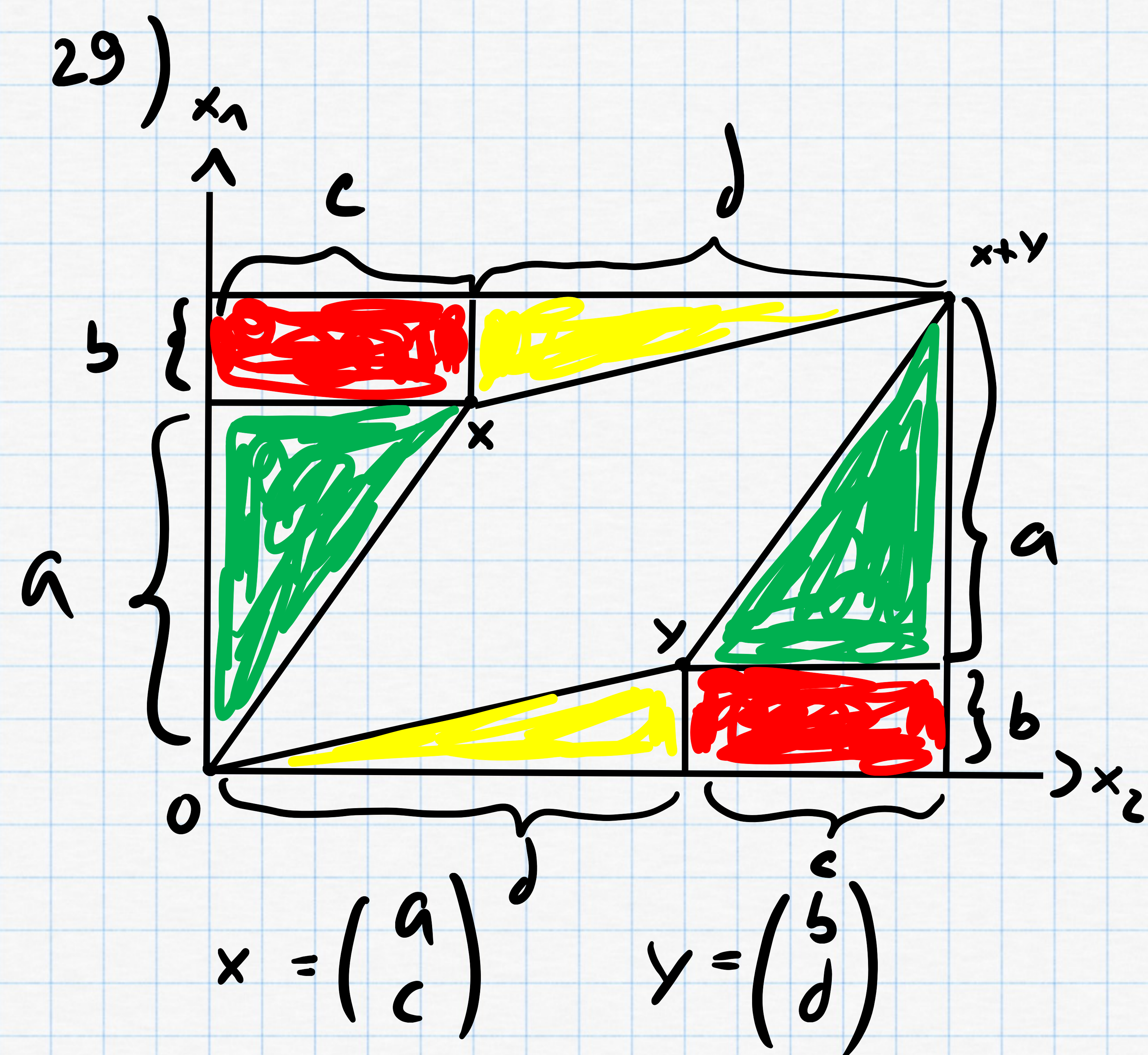
$$28) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 7 = -11$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \\ 4 & -1 & 7 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(B) = 5 \cdot 0 - 12 - 0 - 6 + 7 = -6$$

$$= 1 \cdot 5 \cdot 1 + 2 \cdot 7 \cdot 0 + 4 \cdot 3 \cdot (-1) - 4 \cdot 5 \cdot 0$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 8 & 6 & 6 \\ 7 & 5 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(C) = \det(A) \cdot \det(B) = -11 \cdot (-6) = 66$$

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & -5 & -3 \\ 7 & 0 & -3 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(D) = (-1)^{2+1} \cdot 1 \cdot \det \left( \begin{pmatrix} 4 & 6 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & -5 & -3 \end{pmatrix} \right) = (-1)^{2+2} \cdot 4 \cdot \det \left( \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \right) = 4 \cdot (-12 - 6) = 4 \cdot (-18) = -72$$



$$(a+b) \cdot (d+c) - 2(b \cdot c) - 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot b \cdot d\right) - 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot a \cdot c\right) =$$

$$ad + \cancel{bd} + \cancel{dc} + bc - 2bc - \cancel{bd} - \cancel{dc} =$$

$$ad - bc =$$

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \det(x|y)$$