

$$19 a) \varphi_1: \mathbb{Q}^2 \rightarrow \mathbb{Q}^3, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 5x+3y \\ 11x \\ 2x-4y \end{pmatrix}$$

$$\text{Nullvektor: } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 5 \cdot 0 + 3 \cdot 0 \\ 11 \cdot 0 \\ 2 \cdot 0 - 4 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \checkmark$$

$$\varphi \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right) = \varphi \left(\begin{pmatrix} x+ax' \\ y+ay' \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 5 \cdot (x+ax') + 3 \cdot (y+ay') \\ 11 \cdot (x+ax') \\ 2 \cdot (x+ax') - 4 \cdot (y+ay') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x+3y \\ 11x \\ 2x-4y \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} 5x'+3y' \\ 11x' \\ 2x'-4y' \end{pmatrix} = \varphi \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) + a \cdot \varphi \left(\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right)$$

$$b) \varphi_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^3 \\ x^2 y \\ y - x \end{pmatrix}$$

$$\varphi_2 \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\varphi_2 \left(2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \neq 2 \cdot \varphi_2 \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{keine lin. Abb.}$$

$$c) \varphi_3: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y-1 \\ -x-2 \end{pmatrix}$$

$$\varphi_3 \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{keine lin. Abb.}$$

$$d) \varphi_4: \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}[x], f \mapsto f(x^2)$$

$$0 \mapsto 0(x^2) = 0$$

$$\varphi_4(f + \lambda g) = (f + \lambda g)(x^2) = f(x^2) + \lambda g(x^2) = \varphi_4(f) + \lambda \cdot \varphi_4(g)$$

T20 a) Sei $A = (s_1 | \dots | s_n)$ mit $s_i \in K^n$

$$\text{Bild}(\varphi_A) = \langle s_1, \dots, s_n \rangle$$

$$\text{Bild}(\varphi_A) = \{ A \cdot x \mid x \in K^n \} =$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n \\ \vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \dots + a_{mn} \cdot x_n \end{pmatrix} \mid x_1, \dots, x_n \in K \right\} =$$

$$\left\{ x_1 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}}_{s_1} + x_2 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}}_{s_2} + \dots + x_n \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}}_{s_n} \mid x_1, \dots, x_n \in K \right\}$$

$$= \langle s_1, s_2, \dots, s_n \rangle$$

$$b) \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_1 \leftrightarrow C_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_1 + 2C_2, C_3 - C_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_3 + C_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot \underline{v} \quad v \in \mathbb{R}^4, A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{Bild}(\varphi_A) = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\underbrace{\dim(V)}_4 = \underbrace{\dim(\ker(\varphi_A))}_2 + \dim(\text{Bild}(\varphi_A))$$

$$4 = 2 + \dim(\text{Bild}(\varphi_A))$$

$$\Rightarrow \dim(\text{Bild}(\varphi_A)) = 2$$

$$\Rightarrow C = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

T21) $\varphi: V \rightarrow W$, mit V, W K -Vektorräume und $U \subseteq V$ sei UVR von V

$\varphi(U)$ UVR von W ?

Nullvektor: $0_V \in U$, da U ein UVR ist und weil φ eine lin. Abb. ist, gilt $\varphi(0_V) = 0_W$ und damit ist $0_W \in \varphi(U)$

Abgeschlossenheit bzgl. Addition:

Seien $u_1, u_2 \in \varphi(U)$. Dann muss es $v_1, v_2 \in U$ geben mit $\varphi(v_1) = u_1$ und $\varphi(v_2) = u_2$. Da φ eine lin. Abb. ist,

$$\text{gilt } \varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2) = u_1 + u_2 \Rightarrow u_1 + u_2 \in \varphi(U)$$

Abgeschlossenheit bzgl. Skalarmultiplikation:

sei $w \in \varphi(U)$ und $a \in K$. Dann gibt es $v \in U$ mit $\varphi(v) = w$. Da φ eine lin. Abb. ist, gilt $\varphi(a \cdot v) = a \cdot \varphi(v) = a \cdot w \Rightarrow a \cdot w \in \varphi(U)$

$\Rightarrow \varphi(U)$ ein UIR von W