19a) $\varphi_1 : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^3 ; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 5x+3y \\ 11x \\ 2x-4y \end{pmatrix}$

$$\underline{\varphi_1\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + a\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right)} = \varphi\left(\begin{pmatrix} x+ax' \\ y+ay' \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 5(x+ax')+3(y+ay') \\ 11(x+ax') \\ 2(x+ax')-4(y+ay') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x+3y \\ 11x \\ 2x-4y \end{pmatrix} + a\cdot\begin{pmatrix} 5x'+3y' \\ 11x' \\ 2x'-4y' \end{pmatrix} = \varphi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) + a\cdot\varphi\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

b) $\varphi_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 ; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^3 \\ -x^2 y \\ y-x \end{pmatrix}$

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \text{ aber } \varphi\left(2\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \varphi\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \neq 2\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

c) $\varphi_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 ; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y-1 \\ -x-2 \end{pmatrix}$

$$\varphi_3\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \text{keine lin. Abb.}$$

d) $\varphi_4 : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x] ; f \mapsto f(x^2)$

$$\varphi_4(f+\lambda g) = (f+\lambda g)(x^2) = f(x^2) + \lambda\cdot g(x^2) = \varphi_4(f) + \lambda\cdot\varphi_4(g)$$

T20 a) $\text{Bild}(\varphi_A) \overset{!}{=} \langle s_1, \dots, s_n \rangle$

$$\text{Bild}(\varphi_A) = \{A\cdot x \mid x \in K^n\} = \left\{\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} \;\middle|\; \underline{x_1, \dots, x_n \in K}\right\} =$$

$$\left\{ x_1\cdot\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}}_{s_1} + \dots + x_n\cdot\underbrace{\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}}_{s_n} \;\middle|\; x_1, \dots, x_n \in K \right\} = \langle s_1, \dots, s_n \rangle$$

b) Kern(φ_A):

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot 2 \\ \cdot(-1) \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +1 \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Basis von Kern}(\varphi) \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Bild(φ_A):

nach a): $\text{Bild}(\varphi_A) = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle$

Nach Dimensionssatz: $\underbrace{\dim(\mathbb{R}^4)}_{4} = \underbrace{\dim(\text{Kern}(\varphi_A))}_{2} + \dim(\text{Bild}(\varphi_A))$

$$4 = 2 + \dim(\text{Bild}(\varphi_A))$$

$$\Rightarrow \dim(\text{Bild}(\varphi_A)) = 4 - 2 = 2$$

$\rightarrow$ wir brauchen 2 lin. unabh. Vektoren, die das Bild(φ_A) aufspannen

$\Rightarrow$ z.B. $\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

T21) $U \subseteq V$ ist UVR von V

$\rightarrow \varphi(U)$ UVR von W?

$\varphi(0_V) = 0_W$

$\rightarrow 0_W \in \varphi(U)$

$\rightarrow$ Nullvektor enthalten

Abgeschlossenheit unter Addition:

$w_1, w_2 \in \varphi(U)$. Dann existieren $u_1, u_2 \in U$ mit $\varphi(u_1) = w_1$ und $\varphi(u_2) = w_2$ lin. Abb.

$\Rightarrow$ U ist ein UVR, also folgt $u_1 + u_2 \in U$ und φ ist linear, also gilt $w_1 + w_2 = \varphi(u_1) + \varphi(u_2) = \varphi(u_1 + u_2) \in \varphi(U)$

Abgeschlossenheit unter Skalarmultiplikation:

$a \in K$, $w \in \varphi(U)$. Dann existiert $u \in U$ mit $\varphi(u) = w$ und $a \cdot u \in U$, weil U UVR ist. Weiterhin gilt, da φ eine lin. Abb. ist,
$a \cdot w = a \cdot \varphi(u) = \varphi(a \cdot u) \in \varphi(U)$

$\Rightarrow$ $\varphi(U)$ ist ein UVR von W