T16 a) $n = 5$ Inforate: $\frac{2}{5}$

$k = 2$ Redundanz: 3

b) $C = \left\{ \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\1\\0\\1\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\0\\1\\0\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\1\\1\\1\\0 \end{pmatrix} \right\}$ $d(C) = 3$

c)

$$\begin{array}{l} \text{1. Komp. Ausg.} \rightarrow \\ \text{2. "} \rightarrow \end{array} \quad G = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} \\ \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix}} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow I_2 \\ \leftarrow A \end{array}$$

1. Komp. Input

$$P = \left(\underbrace{\boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix}}}_{-A \overset{\mathbb{F}_2}{=} A} \; \underbrace{\boxed{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}}_{I_3} \right)$$

d) $v_1 = (1,1,1,1,0)$ $v_3 = (0,0,1,1,0)$

$v_2 = (0,1,1,1,1)$

$$P \cdot v_1 = \begin{pmatrix} 1&0&1&0&0 \\ 0&1&0&1&0 \\ 1&1&0&0&1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}1\\1\end{matrix}} \\ 1\\1\\0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\0\\0 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ gültiges Codewort

$\rightarrow \begin{pmatrix} 1\\1 \end{pmatrix}$ das empf. Infowort

$$P \cdot v_2 = \begin{pmatrix} 1&0&1&0&0 \\ 0&1&0&1&0 \\ 1&1&0&0&1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0\\1\\1\\1\\1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\\0\\0 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ kein gültiges Codewort

$$\begin{pmatrix} 1&0&1&0&0 \\ 0&1&0&1&0 \\ 1&1&0&0&1 \end{pmatrix} \cdot f = \boxed{\begin{pmatrix} 1\\0\\0 \end{pmatrix}}$$

$$f = \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\0\\0 \end{pmatrix} \rightarrow v_2' = v_2 - f = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}0\\1\end{matrix}} \\ 0\\1\\1 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ wahrsch. Infowort $\begin{pmatrix} 0\\1 \end{pmatrix}$

$$P \cdot v_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{ODER} \quad f = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ beide gleich wahrscheinlich

$\Rightarrow$ neu anfordern

T17 a) $d(C) = \min\{ d(c,c') \mid c,c' \in C,\ c \neq c' \}$

$= \min\{ \underline{w(c-c')} \mid c,c' \in C,\ \underline{c \neq c'} \}$

Es gilt für jedes $c,c' \in C$: $\underline{c-c'} \in C$

$\Rightarrow d(C) = \min\{ w(c) \mid c \in \underline{C \setminus \{0\}} \}$

b) $s_1, \dots, s_n \in \mathbb{F}_2^{n-k}$ $\quad P = (s_1 | \dots | s_n) \in \mathbb{F}_2^{(n-k)\times n}$

$$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_2^n$$

$c \in C \Leftrightarrow P \cdot c = 0 \Leftrightarrow \underline{c_1 \cdot s_1 + \dots + c_n \cdot s_n} = 0$

aus a): $d(C) = \min\{ w(c) \mid c \in C \setminus \{0\} \}$

$d(C) = \min\{ r \in \mathbb{N} \mid \exists c \in C \setminus \{0\} \text{ mit } w(c) \leq r \}$

$= \min\{ r \in \mathbb{N} \mid \exists c \in C \text{ mit } 1 \leq w(c) \leq r \}$

$= \min\{ r \in \mathbb{N} \mid \exists c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_2^n \text{ mit } P \cdot c = 0 \text{ und } 1 \leq w(c) \leq r \}$

$= \min\{ r \in \mathbb{N} \mid \exists c_1, \dots, c_n \in \mathbb{F}_2$ mit $c_1 s_1 + \dots + c_n s_n = 0$ und mindestens 1, aber höchstens r von den c_i sind $\neq 0 \}$

$= \min\{ r \in \mathbb{N} \mid$ es gibt r Indizes $i_1, \dots, i_r$ mit $1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_r \leq n$ und $\exists c_{i_1}, \dots, c_{i_r} \in \mathbb{F}_2$, die nicht alle $= 0$ mit

$c_{i_1} s_{i_1} + \dots + c_{i_r} s_{i_r} = 0 \}$

$= \min\{r \in \mathbb{N} \mid$ es gibt r lin. abh. Spalten in $P\}$

T18) $(x,y) \mapsto (x,y,x,y)$

a) $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad P = (s_1 | \dots | s_n)$

b) Syndrome $= \langle s_1, \dots, s_n \rangle = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \mathbb{F}_2^2$

c) $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}: \quad \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}: \quad \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}: \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}: \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

d) v_1: → kein Fehler, da gültiges Codewort

v_2: → Fehler, da wahrsch. Codewort nicht ermittelbar, weil mehrere Fehlervektoren gleichwahrscheinlich mit höchster Wsk.

v_3: → Fehler, "

v_4: → Fehler, "

e) $\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

Für alle anderen Wörter $\in \mathbb{F}_2^4$: Fehler