

T16 a) $n = 5$ Informationsrate: $\frac{2}{5}$
 $k = 2$ Redundanz = 3

b) $C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ $d(C) = 3$

→ 1-fehlerkorrigierend
 2-fehlererkennend

$V: \sum_{v \in V} \lambda_v v = 0 \Leftrightarrow \lambda_v = 0 \quad \forall v \in V$

c) $G = \begin{pmatrix} \overset{I_2}{1 & 0} & \overset{A}{0 & 1} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} \overset{I_2}{1 & 0} & \overset{A}{1 & 0 & 0} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
 $\downarrow -A = A$
 $\uparrow I_3$

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$P \cdot v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow v_1 \text{ ist ein Codewort}$

⇒ z.B. Informationswort ist $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$P \cdot v_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$P \cdot f = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{am wahrscheinlichsten:}$

$f = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\rightarrow c'' = v_2 - f = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P \cdot f = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P \cdot v_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad P \cdot f$$

$$f = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$c'' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

oder

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Codewort neu anfordern

$$117) \quad C \subseteq F_2^n, \quad P \in F_2^{(n-k) \times n}$$

$$\sim) \quad d(C) = \min \{ w(c) \mid c \in C \setminus \{0\} \}$$

$$\text{Wir wissen, dass } d(C) = \min \{ w(c - c') \mid c, c' \in C, c \neq c' \}$$

→ C ist Lösungsraum des LGS, dass durch die Generatormatrix G beschrieben wird.

$$\Rightarrow c, c' \in C : \boxed{c - c'} \in C$$

$$\omega(c - c' - 0) = \omega(c - c') \leftarrow \text{wenn das Minimum ist}$$

gilt für den Vektor $c'' = c - c' \in C$,

$$\text{dass } d(C) = \omega(c'') \text{ mit } c'' \neq 0$$

⇒ folglich gilt die Gleichung von oben

$$b) P \in \mathbb{F}_2^{(n-k) \times n} : s_1, \dots, s_n \in \mathbb{F}_2^{n-k} \text{ die Spalten von } P,$$

$$P = (s_1 \mid \dots \mid s_n)$$

$$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_2^n$$

$$\Rightarrow c \in C \Leftrightarrow P \cdot c = 0 \Leftrightarrow c_1 \cdot s_1 + \dots + c_n \cdot s_n = 0$$

$$d(C) = \min \{ w(c) \mid c \in C \setminus \{0\} \}$$

$$= \min \{ r \in \mathbb{N} \mid \exists c \in C \setminus \{0\} : w(c) \leq r \}$$

$$= \min \{ r \in \mathbb{N} \mid \exists c \in C : 1 \leq w(c) \leq r \}$$

$$= \min \{ r \in \mathbb{N} \mid \exists c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_2^n \text{ mit } P \cdot c = 0 \text{ und } \underline{1 \leq w(c) \leq r} \}$$

$$= \min \{ r \in \mathbb{N} \mid \exists c_1, \dots, c_n \in \mathbb{F}_2 \text{ mit } c_1 s_1 + \dots + c_n s_n = 0, \text{ und mindestens } 1, \text{ aber höchstens } r \text{ von den } c_i \neq 0 \}$$

$$= \min \{ r \in \mathbb{N} \mid \text{es gibt } r \text{ Indizes } i_1, \dots, i_r \in \mathbb{N} \text{ mit } 1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_r \leq n \text{ und } \exists c_{i_1}, \dots, c_{i_r} \in \mathbb{F}_2, \text{ nicht alle } = 0, \text{ mit } c_{i_1} s_{i_1} + \dots + c_{i_r} s_{i_r} = 0 \}$$

$$= \min \{ r \in \mathbb{N} \mid \text{es gibt } r \text{ lin. abh. Spalten in } P \}$$

$$T \wedge V) (x, y) \mapsto (\boxed{x, y}, x, y)$$

$$a) \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b) \quad P \cdot C = V$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

Der Raum, der durch
 $\{s_1, s_2, s_3, s_4\}$ aufgespannt
 wird mit $P = (s_1 | s_2 | s_3 | s_4)$

$$c) \quad P \cdot f = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad f = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P \cdot f = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad f = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$P \cdot f = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad f = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$p.f = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad f = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$d) \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{kein Fehler}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Fehler wird erkannt, kann aber nicht korrigiert werden}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \quad \quad \quad "$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \quad \quad \quad "$$

$$e) \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$