

T13 a)

$$\dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$$

$$\Rightarrow \text{es sei } \dim(U \cap W) = m$$

$$\Rightarrow A = \{a_1, \dots, a_m\} \text{ ist eine Basis von } U \cap W$$

$$\Rightarrow A \subseteq U \text{ und } A \text{ ist lin. unabh.}$$

$$A \cup B = \{a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n\} \text{ ist eine Basis von } U$$

$$\Rightarrow A \subseteq W \text{ und } A \text{ ist lin. unabh.}$$

$$A \cup C = \{a_1, \dots, a_m, c_1, \dots, c_r\} \text{ ist eine Basis von } W \Rightarrow B \cap C = \emptyset, \text{ denn sonst w\u00e4re } A \text{ keine Basis von } U \cap W$$

$$\dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$$

$$U+W = \langle A \cup B \cup C \rangle$$
$$\Rightarrow \underline{m+n+r} = \underline{m+n} + \underline{m+r} - \underline{m} = \underline{m+n+r}$$

$$13b) \dim(U) = 7$$

$$\dim(W) = 12$$

$$\Rightarrow \underbrace{\dim(U+W)}_{\leq 16} = 7+12 - \dim(U \cap W)$$

$$\Rightarrow \underline{\dim(U \cap W)} = 7+7 - \underbrace{\dim(U+W)}_{\leq 16} \geq 3$$

$$19 - \underbrace{x}_{\leq 16}$$

$$T14) \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -a & 1 \\ a-1 & -2 & 1 \end{array} \right)_{(n-a)}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -a & 1 \\ 0 & a^2-a-2 & 2-a \end{array} \right)$$

$$a^2-a-2 = (a-2)(a+1)$$

$$\text{Fall 1: } a=2$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow U = \left\{ \begin{pmatrix} 1+2\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\text{Fall 2: } a=-1:$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & | & 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow "0=3" \Rightarrow \mathcal{L} = \emptyset$$

Fall 3: $a \neq 2, a \neq -1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -a & | & 1 \\ 0 & (a-2)(a+1) & | & 2-a \end{pmatrix} : (a-2)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -a & | & 1 \\ 0 & (a+1) & | & \underline{-1} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -a & | & 1 \\ 0 & \underline{1} & | & \underline{-\frac{1}{a+1}} \end{pmatrix}$$

$$y = -\frac{1}{a+1} = \frac{1}{a+1} \cdot (-1)$$

$$x = 1 - \frac{a}{a+1} = \frac{a+1-a}{a+1} = \frac{1}{a+1} \cdot (1)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \left\{ \frac{1}{a+1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Trs: a) keine endl. Teilmenge des reellen Vektorraumes
aller Polynome $\mathbb{R}[x]$ kann eine Basis
von $\mathbb{R}[x]$ sein

Wahr, sei $S \subseteq \mathbb{R}[x]$ und $n := \max \{i \mid a_i x^i + \dots \in S\}$ der Maximalgrad
aller Polynome in S .

$\Rightarrow x^{n+1} \notin \langle S \rangle \Rightarrow S$ keine Basis von $\mathbb{R}[x]$
 $\Rightarrow$ gilt für alle $S \subseteq \mathbb{R}[x]$ und $|S| < \infty$

b) $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\} \subseteq \mathbb{R}^5$ und lin. unabh. mit $U := \langle b_1, b_2, b_3, b_4 \rangle$

Es gibt ein $v \in \mathbb{R}^5$, sodass $B \cup \{v\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^5$ ist

$\Rightarrow$ Wahr, da Basisergänzungssatz

c) Jede Basis von $\mathbb{R}^5$ kann durch Ergänzen eines Vektors zu einer Basis von U reduziert
werden

$\Rightarrow$ Sei $b_i = e_i - e_{i+1}$, für $i = 1, \dots, 4$

$\Rightarrow \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ Basis von $\mathbb{R}^5$

$\Rightarrow$ durch Streichen eines Vektors kann $\langle b_1, b_2, b_3, b_4 \rangle$ nicht
erzeugt

$\Rightarrow$ Falsch

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \mathbb{R}^5$$

$$\rightarrow \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = U$$

d) Es gibt unendlich viele Basen von $\mathbb{R}^5$, die durch Weglassen eines Vektors zu einer Basis von U werden

$$M^5 = \{b_1, b_2, b_3, b_4, \lambda v\} \text{ analog zu b)}$$

$\Rightarrow \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow$ unendlich viele Mgl.

e) Für jeden $U \subset \mathbb{R}^5$, der nicht nur aus 0 besteht, ist $U+W=\mathbb{R}^5$

$\rightarrow$ Falsch, z.B. $W=U \Rightarrow U+U=U \neq \mathbb{R}^5$