

T10

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

$x_3 = 0, x_4 = 1$

$x_2 = 3 \cdot 0 = 0$

$x_1 = 2 \cdot 0 - 1 \cdot (1) = -1$

$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$x_3 = 1, x_4 = 0$

$x_2 = 3 \cdot 1 = 3$

$x_1 = 2 \cdot 3 - 1 \cdot 0 = 6$

$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$x_1 = 1, x_3 = 0, x_5 = 0$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$x_1 = 0, x_3 = 1, x_5 = 0$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$x_1 = 0, x_3 = 0, x_5 = 1$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & \overset{1}{-2} & 0 & \overset{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$x_2 = 1, x_4 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -\frac{5}{4} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$x_2 = 0, x_4 = 1$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T11) \quad f_1(x) = x, \quad f_2(x) = \sin(x) \quad f_3(x) = \cos(x)$$

$$\lambda_1 \underline{f_1(x)} + \lambda_2 \underline{f_2(x)} + \lambda_3 \underline{f_3(x)} = 0$$

$$\boxed{\lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot \underbrace{\sin(0)}_{=0} + \lambda_3 \cdot \underbrace{\cos(0)}_{=1} = 0}$$

$$\Rightarrow \lambda_3 \cdot 1 = 0, \text{ also } \lambda_3 = 0$$

$$\lambda_1 \cdot \underline{f_1(x)} + \lambda_2 \cdot \underline{f_2(x)} = 0$$

$$\lambda_1 \cdot 2\pi + \underbrace{\lambda_2 \cdot \sin(2\pi)}_{=0} = 0$$

$$\lambda_1 \cdot 2\pi = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$$

$$\lambda_2 \cdot \boxed{f_1(x)} = 0 \quad x = 0$$

$$\lambda_2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0$$

$\Rightarrow \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 = 0$, damit die Gleichung erfüllt ist

$\Rightarrow f_1, f_2, f_3$ lin. unabh.

$$T12 c) \quad L_j := \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n \frac{x - a_i}{a_j - a_i}$$

$$L_j(a_k) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } k=j \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\lambda_0, \dots, \lambda_n \in K$$

$$\Rightarrow \text{es soll gelten: } \lambda_0 L_0 + \dots + \lambda_n L_n = \underline{0}$$

$\Rightarrow$ wir setzen Stützstelle a_k ein mit $k \in \{0, \dots, n\}$

$$\underline{0} = \left(\sum_{j=0}^n \lambda_j L_j \right)(a_k) = \sum_{j=0}^n \lambda_j \cdot \underbrace{L_j(a_k)}_{=1} = \lambda_k \cdot \underbrace{L_k(a_k)}_{=1}$$

$$\Rightarrow \lambda_k = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_k = 0 \text{ für alle } k \in \{0, \dots, n\}$$

$$\Rightarrow L_1, \dots, L_n \text{ lin. unabh.}$$

b) Existenz:

Wir definieren $f(x) = \sum_{j=0}^n b_j \cdot L_j(x)$

$\rightarrow$ alle L_j sind von Grad n

$$\Leftrightarrow \deg(f) \leq n$$

$\rightarrow$ für eine $k!$ Stützstelle a_k mit $k \in \{0, \dots, n\}$ ergibt sich

$$\boxed{f(a_k)} = \sum_{j=0}^n b_j \cdot L_j(a_k) = b_k \cdot \underbrace{L_k(a_k)}_{=1} = \boxed{b_k}$$

Eindeutigkeit: Sei g ein weiteres Polynom mit $\deg(g) \leq n$ und $g(a_k) = b_k \quad \forall k \in \{0, \dots, n\}$

$$\rightarrow (f-g)(a_k) = f(a_k) - g(a_k) = b_k - b_k = 0$$

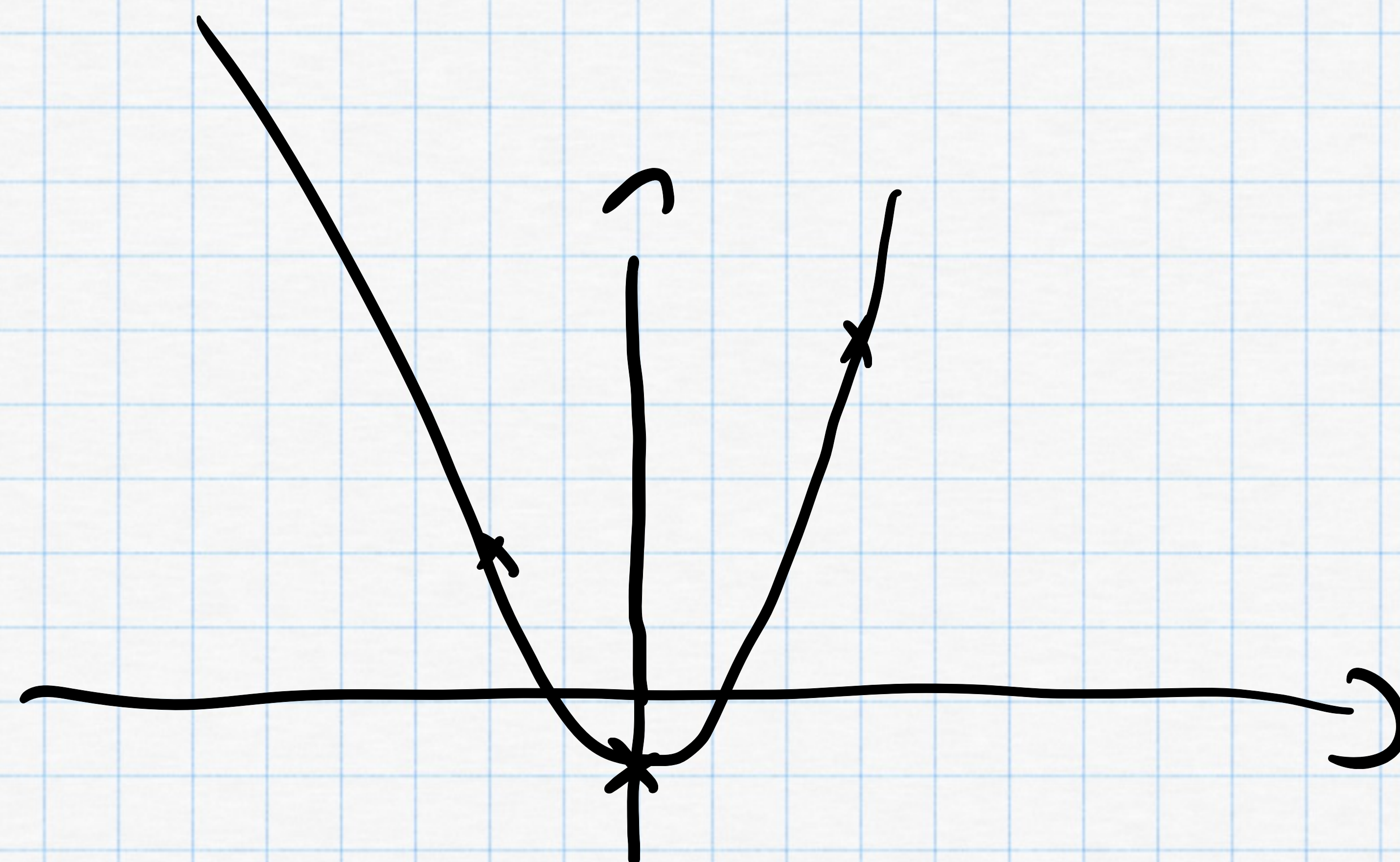
$\Rightarrow$ weil f und g maximal Grad n haben, hat $f-g$ auch maximal Grad n

$\Rightarrow \deg(f-g) \leq n$, aber $f-g$ hat $\overset{\text{mindestens}}{n+1}$ Nullstellen

$\Rightarrow f-g$ muss immer 0 sein $\Rightarrow f-g$ die Nullfunktion

$$\Rightarrow f = g$$

c) $f(0) = -1, f(3) = 5, f(-1) = 1$



$$(a_0, b_0) = (-1, 1)$$

$$(a_1, b_1) = (0, -1)$$

$$(a_2, b_2) = (3, 5)$$

$$L_0(x) = \left(\frac{x - \overset{\downarrow}{0}}{-1 - \overset{\downarrow}{0}} \right) \left(\frac{x - \overset{\downarrow}{3}}{-1 - \overset{\downarrow}{3}} \right) = -x \cdot \left(\frac{-x+3}{4} \right) = \frac{x^2 - 3x}{4}$$

$$L_1(x) = \left(\frac{x - \overset{\downarrow}{(-1)}}{0 - \overset{\downarrow}{(-1)}} \right) \left(\frac{x - \overset{\downarrow}{3}}{0 - \overset{\downarrow}{3}} \right) = (x+1) \cdot \left(\frac{x-3}{-3} \right) = \frac{x^2 - 6x - 3}{(-3)}$$

$$L_2(x) = \left(\frac{x - \overset{\downarrow}{(-1)}}{3 - \overset{\downarrow}{(-1)}} \right) \left(\frac{x - \overset{\downarrow}{0}}{3 - \overset{\downarrow}{0}} \right) = \frac{x+1}{4} \cdot \frac{x}{3} = \frac{x^2+x}{12}$$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{j=0}^2 b_j \cdot L_j(x) = \frac{x^2-3x}{4} + \frac{x^2-2x-3}{3} + 5 \frac{x^2+x}{12} \\ = x^2 - x - 1$$