

$$a) \quad A = \begin{pmatrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} x_1 - 1 \cdot 0 + 1 = 0 \rightarrow x_1 = -1 \\ x_2 - 3 \cdot 0 = 0 \rightarrow x_2 = 0 \end{array}$$

$$U = \left\{ \lambda \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\text{Basis: } \left\{ \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$b) \quad B = \begin{pmatrix} \downarrow & \downarrow \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad x_4 + 2x_5 = 0$$

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Basis

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$\uparrow \quad \uparrow$

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

T11)

$$\underline{\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0 \Leftrightarrow \forall i: \lambda_i = 0}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot 0 + \lambda_3 \cdot 0 = 0$$

$$\lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 1 + \lambda_3 \cdot 0 = 0$$

$$\rightarrow f_1(x) = x, \quad f_2(x) = \sin(x), \quad f_3(x) = \cos(x)$$

$$\lambda_1 x + \lambda_2 \sin(x) + \lambda_3 \cos(x) = 0$$

$$x=0:$$

$$\lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 0 + \lambda_3 \cdot 1 = 0 \Rightarrow \lambda_3 = 0$$

$$\rightarrow \lambda_1 \cdot x + \lambda_2 \cdot \sin(x) = 0$$

$$\lambda_1 \cdot 2\pi + \lambda_2 \cdot 0 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$$

$$\lambda_2 \cdot \sin(x) = 0$$

$$\rightarrow x = \frac{3}{4}\pi$$

$$\rightarrow \lambda_2 \cdot \sin\left(\frac{3}{4}\pi\right) = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \Rightarrow f_1, f_2, f_3 \text{ lin. unabh.}$$

T11

a) $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in K$ mit

$$\lambda_0 L_0 + \dots + \lambda_n L_n = \underline{0} \quad \text{stelle } a_k \text{ berechnen:}$$

$$L_j(a_k) = 0, \text{ wenn } k \neq j$$

$$0 = \left(\sum_{j=0}^n \lambda_j L_j \right) (a_k) = \sum_{j=0}^n \lambda_j L_j(a_k) = \lambda_k \cdot \underbrace{L_k(a_k)}_{=1} = 0 \Rightarrow \lambda_k \cdot 1 = 0$$

$$\lambda_k = 0$$

$$\Rightarrow \text{alle } \lambda_k = 0$$

$$\Rightarrow L_0, \dots, L_n \text{ lin. unabh.}$$

b) Existenz: $f = \sum_{j=0}^n b_j \cdot L_j \in K[x]$, weil $\deg(L_j) = n$ für alle j , ist $\deg(f) \leq n$

$\Rightarrow$ weiter gilt für $k \in \{0, \dots, n\}$:

$$f(a_k) = \sum_{j=0}^n b_j \cdot \underbrace{L_j(a_k)}_{=0, \text{ falls } k \neq j} = b_k \cdot \underbrace{L_k(a_k)}_{=1} = b_k$$

Eindeutigkeit: Sei $g \in K[x]$ mit $\deg(g) \leq n$ und $g(a_k) = b_k$ für $\forall k \in \{0, \dots, n\}$

$$\Rightarrow \deg(f - g) \leq n \text{ und}$$

$$(f - g)(a_k) = f(a_k) - g(a_k) = b_k - b_k = 0 \quad \forall k \in \{0, \dots, n\}$$

$\Rightarrow (f - g)$ ein Polynom vom Grad $\leq n$ und mindestens $(n+1)$ Nullstellen

NST $\Rightarrow (f - g)$ muss die Nullfunktion sein

$$\Rightarrow f = g$$

$$c) \quad \underbrace{(-1, 1)}_{a_0, b_0}, \quad \underbrace{(0, -1)}_{a_1, b_1}, \quad \underbrace{(3, 5)}_{a_2, b_2}$$

$$L_0(x) = \prod_{i=1}^2 \frac{x - a_i}{-1 - a_i} = \frac{x - 0}{-1 - 0} \cdot \frac{x - 3}{-1 - 3} = \frac{x(x-3)}{4}$$

$$L_1(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq 1}}^2 \frac{x - a_i}{0 - a_i} = \frac{x+1}{0+1} \cdot \frac{x-3}{0-3} = \frac{(x+1)(x-3)}{-3}$$

$$L_2(x) = \prod_{i=0}^1 \frac{x - a_i}{3 - a_i} = \frac{x}{3} \cdot \frac{x+1}{3+1} = \frac{x(x+1)}{12}$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^2 b_k \cdot L_k(x) = 1 \cdot \frac{x(x-3)}{4} - 1 \cdot \frac{(x+1)(x-3)}{-3} + 5 \cdot \frac{x \cdot (x+1)}{12} = x^2 - x - 1$$