1 a) (iii) $M_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \underline{x^2+y^2=0}\}$

$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \in M_3$, denn $0^2+0^2=0$ ✓

Es existiert kein $x \in \mathbb{R}$ mit $x^2<0$ und nur für $x=0$ ist $x^2=0$

$\Rightarrow$ x und y müssen gleich 0 sein

$\Rightarrow \begin{pmatrix}0\\0\\z\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\a+z\end{pmatrix} \in M_3$ für alle $a,z \in \mathbb{R}$, denn $0^2+0^2=0$

$\Rightarrow a \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\az\end{pmatrix} \in M_3$ für alle $a,z \in \mathbb{R}$, denn $0^2+0^2=0$

$\Rightarrow M_3$ ist ein UVR von $\mathbb{R}^3$

(i) $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \notin M_1$, denn $0+0 \neq 2$

$\Rightarrow$ kein UVR

(ii) $\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\\frac{x_1+y_1}{3}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}x_2\\y_2\\\frac{x_2+y_2}{3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1+x_2\\y_1+y_2\\\frac{(x_1+x_2)+(y_1+y_2)}{3}\end{pmatrix} \in M_2$

$a \cdot \begin{pmatrix}x\\y\\\frac{x+y}{3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}ax\\ay\\\frac{a(x+y)}{3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}ax\\ay\\\frac{ax+ay}{3}\end{pmatrix} \in M_2$

$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \in M_2$, denn $0+0=3\cdot 0$

(iv) Nein, $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \in M_4$, aber $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \notin M_4$

(v) $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \in M_5$, aber $(-1)\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix} \notin M_5$

b) (i) $M_1 = \{ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \underline{f(1) = 0} \}$

Nullfkt. $\Rightarrow$ $\underline{0}(x) \overset{?}{\in} M_1$: $0(1) = 0$ ✓ $\quad$ $Abb(\mathbb{R}, \mathbb{R})$:= Menge aller Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$

$\forall f, g \in M_1, \lambda \in \mathbb{R}: (f + \lambda g)(x) \overset{?}{\in} M_1$: $f(1) + \lambda g(1) = 0 + \lambda \cdot 0 = 0$ ✓

$\Rightarrow$ UVR von $Abb(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

(ii) $M_2 = \{ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(0) = 1 \}$

$0(x) \notin M_2$, denn $0(0) = 0 \neq 1$

$\Rightarrow$ kein UVR

(iii) Nicht unter Addition abgeschlossen,

denn z.B. $f(x) = \begin{cases} 0, & x > 0 \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$

$g(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

$\Rightarrow f, g \in M_3$, aber $(f + g)(x) = 1 \notin M_3$

c) $U = \{ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \underline{f(x) = c}, c \in \mathbb{R} \}$

$M_1 = \{ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(1) = 0 \}$

$U \cap M_1 = \{0\}$:

$\{0\} \subseteq U \cap M_1$: trivial, da U und M_1 UVR sind

$U \cap M_1 \subseteq \{0\}$: für $f \in U \cap M_1$ muss gelten, dass $f(1) = 0$. Außerdem muss f konstant sein, d.h.

$\forall x: f(x) = f(1) = 0$

$\Rightarrow$ folglich erfüllt nur die 0-Funktion diese Bedingungen

$\Rightarrow U \cap M_1 \subseteq \{0\}$

Beh.: $U + M_1 = \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$U + M_1 \subseteq \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$: trivial, weil U und M_1 UVR sind

$\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subseteq U + M_1$:

Sei $f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. g ist definiert als $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) - f(1)$.

$\Rightarrow g \in M_1$, denn $g(1) = f(1) - f(1) = 0$

$\Rightarrow$ weiterhin gilt $(f-g) \in U$, denn $(f-g)(x) = f(x) - g(x) = f(x) - (f(x) - f(1)) = \underline{f(1)}$

$\Rightarrow f = g + (f-g) \in M_1 + U$

$\Rightarrow \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subseteq M_1 + U$

Bsp.: $f: x \mapsto x$

$\underline{g \in U}$, $h \in M_1$, $f = g + h$

$\Rightarrow g(x) = 1$

$h(x) + g(x) = h(x) + 1 = f(x) = x$

$h(x) = x - 1$

$h(x) = f(x) - g(x)$

T8): $\langle v_1, v_2 \rangle \overset{?}{=} \langle v_3, v_4 \rangle$

$v_3 = \lambda v_1 + \mu v_2$

$v_4 = \alpha v_1 + \beta v_2$

$\gamma v_3 + \delta v_4 = \gamma(\lambda v_1 + \mu v_2) + \delta(\alpha v_1 + \beta v_2) =$

$(\lambda\gamma + \delta\alpha) v_1 + (\gamma\mu + \delta\beta) v_2$

$$v_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \overset{?}{=} \lambda\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \quad \underline{\lambda, \mu \in \mathbb{R}}$$

$$\overset{?}{=} \begin{pmatrix}\lambda\\ \lambda+\mu\\ \mu\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} &\underline{1 = \lambda} \\ &0 = \lambda + \mu \\ &\underline{1 = \mu} \end{aligned}\right\} \Rightarrow 0 \neq 2$$

$\Rightarrow v_3$ ist also keine lin. komb. von v_1 und v_2

$\Rightarrow \langle v_1, v_2 \rangle \neq \langle v_3, v_4 \rangle$

T9 a) $S_1 \subseteq S_2 \rightarrow \langle S_1 \rangle \subseteq \langle S_2 \rangle$

$v \in \langle S_1 \rangle, \ \forall i \ \exists \alpha : \sum_{i=1}^{n} \alpha v_i = v, \ v_i \in S_1$

$\Rightarrow v_i \in S_1 \rightarrow v_i \in S_2$

$\Rightarrow v \in \langle S_2 \rangle, \ \forall v_i \in S_2 \setminus S_1 : \alpha = 0, \ \forall v_i \in S_2 \cap S_1 : \alpha$ wie oben def

b) $\langle \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \rangle = \langle \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} \rangle$, aber $\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\} \not\subseteq \{\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\}$

c) $\langle v, w \rangle = \langle v, w, v + 2w \rangle$

$v, w \in U \Rightarrow v + 2w \in U$

$v, w \in U \Leftarrow v + 2w, v, w \in U$

$\Rightarrow \langle v, w \rangle = \langle v, w, v+2w \rangle$

d) $V = \mathbb{R}^2 \quad u = w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$u \in \langle v, w \rangle, \quad v \notin \langle u, w \rangle$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \notin \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$