

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z+y \end{pmatrix} \Rightarrow \mathcal{U}^3 + \mathcal{U}^2 = 0$$

$$\text{a. } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2a \end{pmatrix} \Rightarrow \mathcal{U}^2 + \mathcal{U}^2 = 0$$

$\Rightarrow M_3$  ist UVR von  $\mathbb{R}^3$

$$(iv) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in M_4, \text{ aber } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ z+k \end{pmatrix} \notin M_4$$

$\Rightarrow M_4$  ist nicht unter Addition abgeschlossen

$\Rightarrow$  kein UVR von  $\mathbb{R}^3$

$$(v) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in M_5, \text{ Abgeschlossen unter Addition,}$$

aber nicht unter Skalarmultiplikation,

$$\text{denn } (-1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \notin M_5$$

$$b) (i) 0 \in M_1 \Rightarrow \mathcal{U}(1) = 0$$

$$\underline{(f + \lambda g)(x) = f(x) + \lambda g(x)}$$

$$\underline{(f + \lambda g)(1) = f(1) + \lambda \cdot g(1) = 0 + \lambda \cdot 0 = \underline{0}}$$

$$f(1) + g(\lambda \cdot 1)$$



$$f, g \in M_1, \lambda \in \mathbb{R}$$

$$(ii) \quad M_1 = \{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(0) = 1 \}$$

$$0(0) = 0 \rightarrow 0 \notin M_1$$

$$f \in \mathbb{R}^3$$

$$(f + \lambda g)(x) = f(x) + \lambda \cdot g(x)$$

$$(f + \lambda g)(0) = f(0) + \lambda \cdot g(0) = 1 + \lambda \cdot 1 = 1 + \lambda$$

$$\rightarrow \lambda \neq 1, \quad 1 + \lambda \neq 1$$

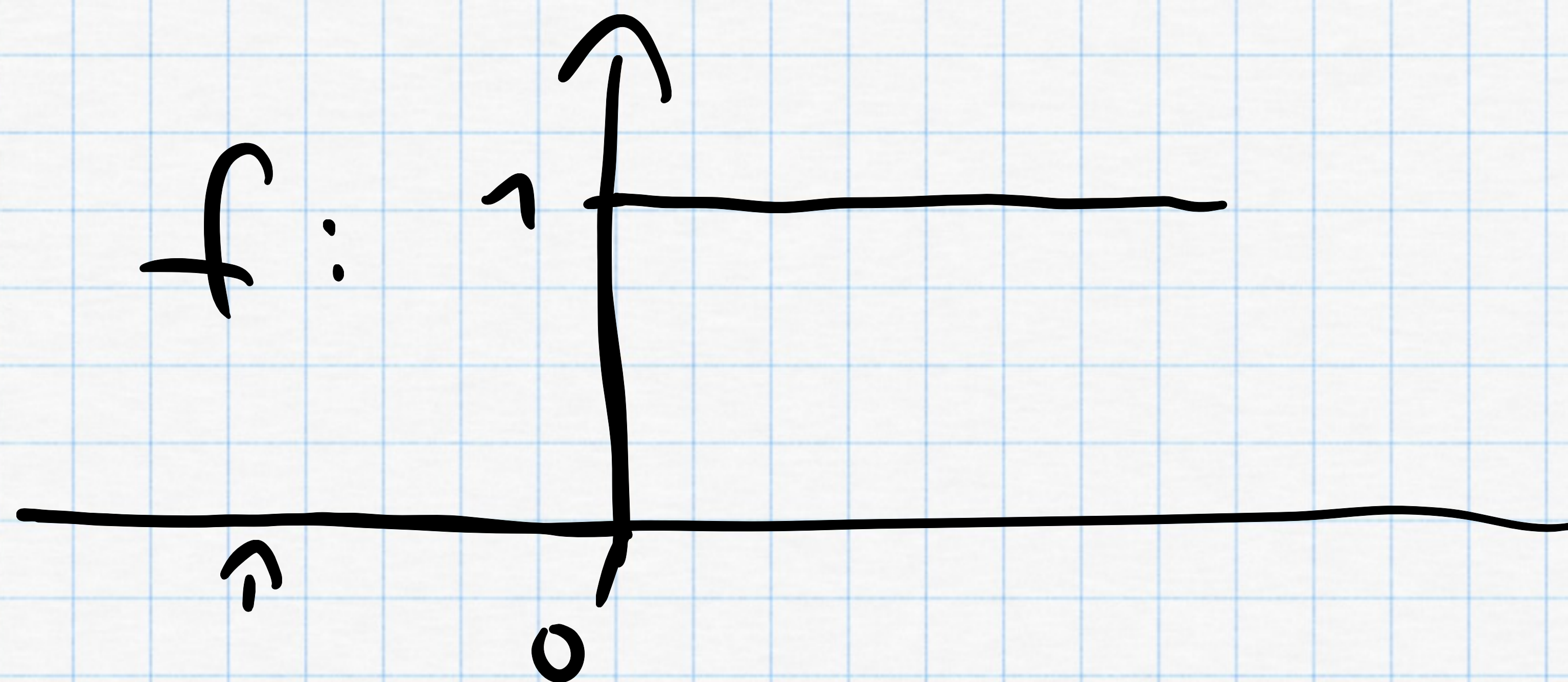
$$(iii) \quad 0 \in M_3 \rightarrow 0(x) = 0 \text{ für } \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{unendlich viele NST}$$

$$(f + g)(x)$$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x > 0 \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$(f + g)(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$





$$c) \quad M_1 = \{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(1) = 0 \}$$

$$U = \{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ konstant} \}$$

$$M_1 \cap U = \{ 0 \}$$

zu zeigen:  $M_1 \cap U \subseteq \{ 0 \}$  ( $\{ 0 \} \subseteq M_1 \cap U$  muss gelten, weil  $M_1$  und  $U$  UVR von  $\text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ )

$$\Rightarrow \text{Sei } f \in M_1 \cap U$$

$$\Rightarrow \text{Denn ist } f \text{ konstant und } f(1) = 0$$

$$\Rightarrow f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) = 0(x)$$

$$\underline{M_1 + U = \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})}$$

$$\Rightarrow \text{zu zeigen: } \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subseteq M_1 + U \quad (M_1 + U \subseteq \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}))$$

$$f \in \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \text{ dann sei } g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) - f(1)$$

$$\Rightarrow g \in M_1, \text{ denn } g(1) = f(1) - f(1) = 0$$

$$\Rightarrow f - g \text{ ist konstant, denn } (f - g)(x) = f(x) - g(x) = \underline{f(x) - f(x)} + f(1) = f(1)$$

$$\Rightarrow f = (g + (f - g)) \in M_1 + U, \text{ da } g \in M_1 \text{ und } (f - g) \in U$$

T8) Wenn  $\langle v_1, v_2 \rangle \stackrel{?}{=} \langle v_3, v_4 \rangle$

$$v_3 \stackrel{!}{=} \lambda \cdot v_1 + \mu \cdot v_2$$



$$v_4 \stackrel{!}{=} a \cdot v_1 + b \cdot v_2, \quad a, b, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$$c \cdot v_3 + d \cdot v_4 \stackrel{!}{=} (\lambda c + ad) v_1 + (cm + bd) v_2$$

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 1, \mu = 1, \lambda + \mu = 1+1 \neq 0$$

79) a)  $S_1 \subseteq S_2$

$\Rightarrow v_1 \in \langle S_1 \rangle$  ist eine lin. komb. von Vektoren aus  $S_1$

$\Rightarrow$  jeder Vektor aus  $S_1$  ist Element von  $S_2$

$\Rightarrow v_1 \in \langle S_2 \rangle$ , denn die Linearkombination ist auch in  $S_2$

b)  $S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

$S_1 \not\subseteq S_2$ , aber  $\langle S_1 \rangle = \langle S_2 \rangle$ , denn  $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \langle S_1 \rangle$

$\Rightarrow$  Falsch

c)  $\langle v, w \rangle \stackrel{!}{=} \langle v, u, v+u \rangle$

$\Rightarrow$  wahr, denn  $v, u \in U \Rightarrow v+u \in U$  ( $U$  ein UVR)

$\Rightarrow v, u \in U \Leftrightarrow v, u, v+u \in U$

$\Rightarrow \langle v, u \rangle = \langle v, u, v+u \rangle$



$$d) \quad V = \mathbb{R}^2 \quad u = w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v \in \langle u, w \rangle, \text{ aber } v \notin \langle u, w \rangle \\ = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$$