

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 5 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 10 & -2 & 4 \\ -1 & 2 & 2 & -2 & -3 \\ 2 & -4 & -7 & 5 & 5 \end{array} \right) \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \cdot (-2) \\ \cdot (-1) \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{l} \cdot 2 \end{array} \right] \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & -1 \end{array} \right) \left[\begin{array}{l} \cdot (-1) \end{array} \right]$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \left[\begin{array}{l} \cdot (-1) \end{array} \right]$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & \underline{5} & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{2} & 4 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$x_3 = \frac{-3}{-3} = 1$$

$$x_4 = \frac{4}{2} = 2$$

$$-1 \cdot x_1 + 2x_2 + 5 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = 0$$

$$-1x_1 + 2x_2 = -1$$

$$x_1 - 2x_2 = 1$$

$$x_2 = \lambda \quad x_1 - 2\lambda = 1$$

$$x_1 = 1 + 2\lambda$$

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda+1 \\ \hat{1} \\ \hat{2} \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

2) Typ I (Zeilen vertauschen):

$$E \in K^{n \times n} : \begin{matrix} & \begin{matrix} i\text{-te} & j\text{-te} \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 0 & 1 \\ & & & \ddots \\ & & 1 & 0 & \dots \\ & & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \leftarrow i\text{-te} \\ \\ \leftarrow j\text{-te} \\ \end{matrix}$$

Einheitsmatrix mit i -ter und j -ter Zeile vertauscht

Typ II:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & 1 & \vdots \\ 0 & \dots & s & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow i\text{-te Zeile, } s \cdot \end{matrix}$$

$i\text{-te Spalte}$

Typ III:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & s & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow j\text{-te Zeile} \\ \end{matrix}$$

j -te Zeile + $(s) \cdot i$ -te Zeile

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & s & 1 \end{pmatrix} \quad \text{2-te Zeile} \cdot s \text{ auf dritte Zeile}$$

3) Jede Matrix A kann mittels Zeilenoperationen von Typ I , II und III in Zeilenstufenform gebracht werden

Sei eine Sequenz von Zeilenoperationen definiert durch $(E_1, \dots, E_n)$, die die Matrix A in Zeilenstufenform bringt.

$$\Rightarrow W = E_n \cdot E_{(n-1)} \cdots E_1$$

$$W \cdot A = R \quad \text{mit } R \text{ in ZSF}$$

$$\hookrightarrow \underline{\underline{A \cdot x = b}}$$

$$\Rightarrow W \cdot A = R \quad \Rightarrow \underbrace{W^{-1} \cdot W}_{I_n} \cdot A = W^{-1} \cdot R$$

$$\Rightarrow A = W^{-1} \cdot R$$

$$\Rightarrow \underbrace{W^{-1} \cdot R}_{\substack{\sim \\ I_n}} \cdot x = \underbrace{b}$$

$$W \cdot W^{-1} \cdot R \cdot x = W \cdot b$$

$$\underbrace{R \cdot x}_{\substack{\sim \\ I_n}} = \underbrace{W \cdot b}_{\leftarrow}$$