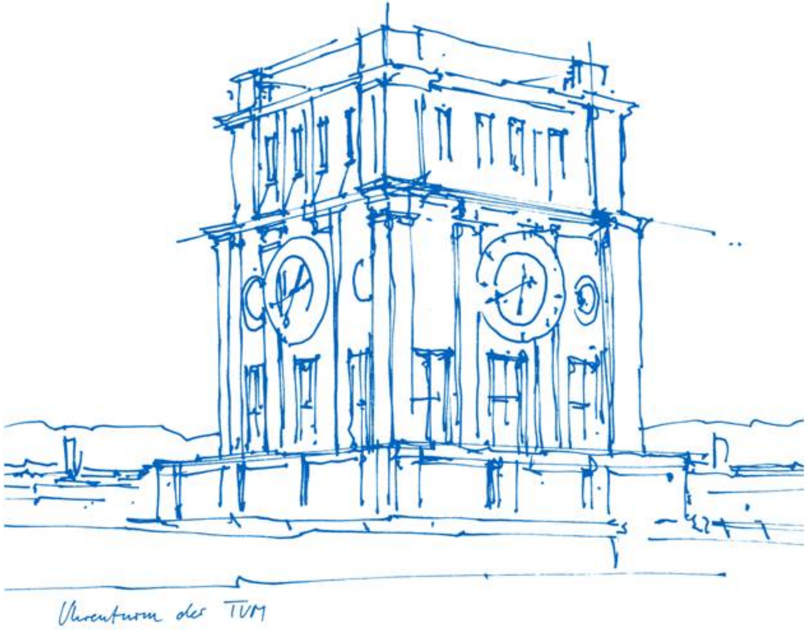
Lineare Algebra für Informatiker – Tutorium KW 29

Jeremias Bohn

Technische Universität München

Fakultät für Mathematik

Garching, 13. Juli 2020



Skalarprodukt

Seien $v, w \in K^n$.

Dann heißt $\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i = v^t w$ das **Standard-Skalarprodukt** von v und w.

Ist $\langle v, w \rangle = 0$ so sind die beiden Vektoren orthogonal zueinander. Es gelten die folgenden Regeln:

- Bilinearität:

$$\langle u, v + aw \rangle = \langle u, v \rangle + a \cdot \langle u, w \rangle \quad \text{bzw.} \quad \langle u + aw, v \rangle = \langle u, v \rangle + a \cdot \langle w, v \rangle$$

- Symmetrie:

$$\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$$

- Unausgeartetheit:

$$(K^n)^\perp = \{0\}$$

Wichtige Eigenschaften von Vektoren

Seien $v, w \in \mathbb{R}^n,\ a \in \mathbb{R}$.

$|v| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$ nennen wir die (euklidsche) **Länge** von v

Es gilt die Dreiecksungleichung $|v + w| \leq |v| + |w|$

Es gilt $|a \cdot v| = |a| \cdot |v|$

Es gilt die Ungleichung von Cauchy-Schwarz $|\langle v, w \rangle| \leq |v| + |w|$ bzw. $|\langle v, w \rangle|^2 \leq \langle v, v \rangle \cdot \langle w, w \rangle$

Orthogonales Komplement

Das orthogonale Komplement für $U \subseteq K^n$

$$U^\perp = \{v \in K^n \mid \forall u \in U\colon \langle u, v \rangle = 0\}$$

Ist die Menge der Vektoren, die zu **ALLEN** Vektoren in U orthogonal ist.

Vorsicht bei Körpern, die nicht der $\mathbb{R}$-Körper sind!

Orthonormalsystem

Eine Menge $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ heißt Orthonormalsystem, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- Alle Vektoren haben Länge 1, also $\forall i\colon |v_i| = 1$
- Alle Vektoren sind orthogonal zueinander, also $\forall i \in [n]\ \forall j \in [n] \setminus \{i\}\colon \langle v_i, v_j \rangle = 0$

Kurz:

$$\forall i, j \in [n]\colon \langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Wenn $A \in K^{k \times n}$ die Matrix ist, die die v_is als Spalten trägt, so gilt

$$A^T \cdot A = I_n$$

Gram-Schmidt‘sches Orthogonalisierungsverfahren

Das Gram-Schmidt‘sche Orthogonalisierungsverfahren wird angewendet, um zu einem Unterraum $U \subseteq K^n$ eine sogenannte **Orthonormalbasis** zu berechnen, also eine Basis, die ein Orthonormalsystem ist.

Input: Eine Menge Vektoren $S = \{v_1, \dots, v_k\}$, sodass gilt: $U = \langle S \rangle$

Algorithmus:

1. Setze $m := 0$
2. Für $i = 1, \dots k$:
    1. Setze $w_i := v_i - \sum_{j=1}^{m} \langle u_j, v_i \rangle \cdot v_i$
    2. Falls $w_i \neq 0$:
        1. $m := m + 1$
        2. $u_m := \frac{1}{|w_i|} \cdot w_i$

Output: Eine Orthonormalbasis $\{u_1, \dots, u_m\}$ zum Unterraum U

(Spezielle) Orthogonale Gruppe

Eine quadratische Matrix $A \in K^{n \times n}$ heißt orthogonal, falls gilt:

$$A^T \cdot A = I_n$$

Wir definieren folgend die orthogonale Gruppe $O_n(K) \coloneqq \{A \in K^{n \times n} \mid A^T \cdot A = I_n\}$.

Die spezielle orthogonale Gruppe $SO_n(K) \coloneqq O_n(K) \cap SL_n(K)$ ist der Schnitt zwischen der speziellen linearen Gruppe (Matrizen mit Determinante 1) und der orthogonalen Gruppe.

Für $A \in O_n(K)$ und $v, w \in K^n$ gilt

$$\langle Av, Aw \rangle = \langle v, w \rangle$$