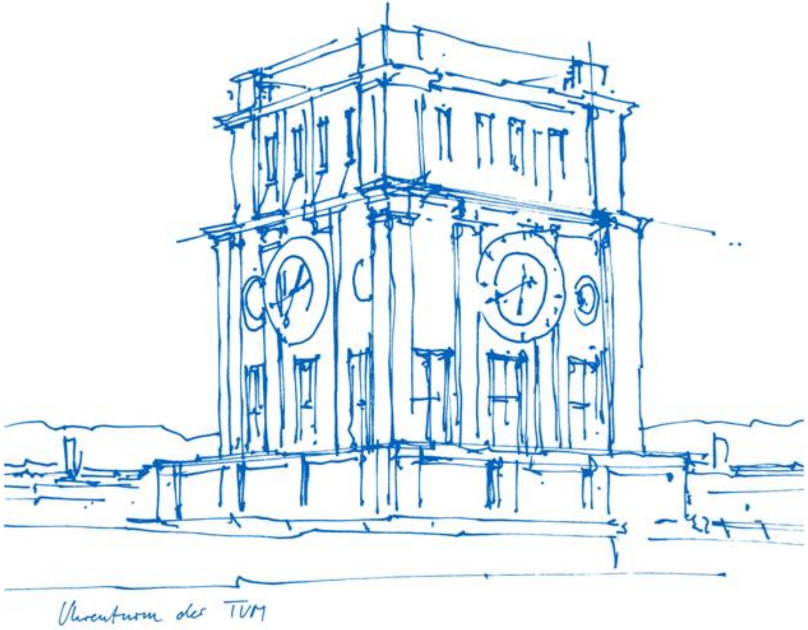
Lineare Algebra für Informatiker – Tutorium KW 28

Jeremias Bohn

Technische Universität München

Fakultät für Mathematik

Garching, 06. Juli 2020



Hausaufgabenbesprechung

- Generell:

  Bitte gebt immer eure Umformungsschritte bei Matrizen an und auch welche Regeln ihr beim Lösen von Determinanten benutzt (beim Laplace‘schen Entwicklungssatz auch nach welcher Zeile/Spalte ihr entwickelt, etc.)
- H 32: Einige haben hier nicht erkannt, dass man das hier mit der Blockmatrix-Regel vereinfachen kann
- H 33c): Die Bemerkung reicht hier nicht für die Lösung, da diese voraussetzt, dass das charakteristische Polynom in Linearfaktoren zerfällt
- H 34e): Auch wenn $(x+1)$ identisch zu diesem Polynom ist, müsst ihr bei der Linearfaktorzerlegung aus einem Polynom von Grad 4 wieder ein Polynom von Grad 4 erzeugen.
- H 35c): Vorsicht, das ist **KEINE** Spiegelung an der Geraden U. Wenn ihr eine Gerade von v nach $\varphi(v)$ zieht, seht ihr, dass diese nicht senkrecht auf U steht.

Trick: Linearfaktoren von bestimmten Polynomen

Sei $f := x^{2m} + bx^m + c$.

Dann gilt $f = (x^m + y)(x^m + z)$ mit $y + z = b;\ y \cdot z = c$

Wir suchen also zwei Werte y, z, die diese Bedingung erfüllen. Diese Werte kann man oft sehr leicht mit kurzem Überlegen erkennen und spart sich das Anwenden der p-q-Formel.

Man kann das auch auf Polynome mit Vorfaktoren für x^{2m} erweitern, ist dann aber schwieriger zu erkennen.

Recap: Diagonalisierung

Eine Matrix $A \in K^{n \times n}$ ist diagonalisierbar, wenn für alle Eigenwerte λ gilt:

$$m_g(\lambda) = m_a(\lambda)$$

Wir können dann die Diagonalmatrix $D \in K^{n \times n}$ aufstellen, die auf ihrer Diagonalen die Eigenwerte (mit der Anzahl gegeben durch m_a) hat und die Matrix $S \in K^{n \times n}$, die in ihren Spalten die jeweils zugehörigen Basisvektoren der Eigenräume trägt (Wir führen also einen Basiswechsel zu einer Basis von Eigenvektoren durch).

Es gilt dann $A = SDS^{-1}$, D ist also ähnlich zur Matrix A.

Rekursive Funktionen von diagonalisierbaren Matrizen

Sei $A \in K^{n \times n}$ eine diagonalisierbare Matrix, es gilt $A \coloneqq SDS^{-1}$.

Angenommen wir wollen das Ergebnis des m-ten rekursiven Aufrufs von A bezüglich eines Eingabewertes berechnen, also

$$A^m \cdot x$$

Dann können wir stattdessen viel effizienter

$$(SDS^{-1})^{\,m} \cdot x = SD^m S^{-1} \cdot x = S \cdot \begin{pmatrix} {\lambda_1}^m & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & {\lambda_n}^m \end{pmatrix} \cdot S^{-1} \cdot x$$

berechnen.

Trigonalisierbarkeit

Eine Matrix $A \in K^{n \times n}$ ist genau dann trigonalisierbar (ist also ähnlich zu einer (oberen) Dreiecksmatrix), wenn das charakteristische Polynom χ_A in Linearfaktoren zerfällt. Jede Matrix, die diagonalisierbar ist, ist daher auch trigonalisierbar (trivial, da eine Diagonalmatrix eine Sonderform einer Dreiecksmatrix ist), aber nicht jede trigonalisierbare Matrix ist auch diagonalisierbar.

Einen Algorithmus zur Bestimmung dieser Trigonalmatrizen werden wir nicht explizit besprechen.