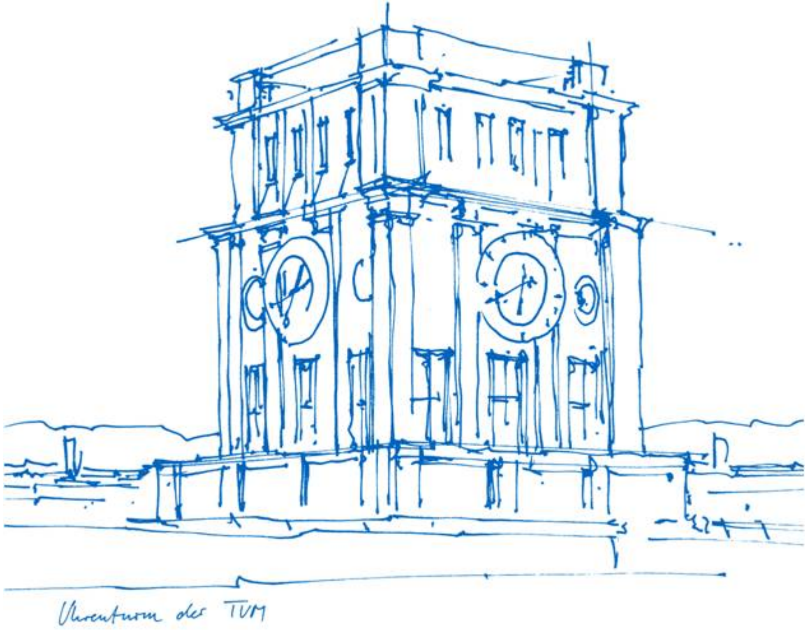
Lineare Algebra für Informatiker – Tutorium KW 27

Jeremias Bohn

Technische Universität München

Fakultät für Mathematik

Garching, 29. Juni 2020



Eigenwerte und -vektoren

Ein Vektor $v \in K^n$ heißt Eigenvektor zur Matrix $A \in K^{n \times n}$, wenn für ein beliebiges $\lambda \in K$

$$A \cdot v = \lambda \cdot v$$

gilt. Der Vektor v wird also durch die Matrix A also nur **verlängert**, behält aber seine Richtung bei!

Das Skalar λ wird dann als der zugehörige Eigenwert bezeichnet.

Interessante Anwendungen sind beispielsweise:

- Principal Component Analysis:
  - Reduktion von features, z.B. in Data Science, Machine Learning, Kompression
- Markow-Ketten (siehe Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie (IN0018))
  - Google PageRank

Charakteristisches Polynom

Wir können die Eigenwerte einer Matrix $A \in K^{n \times n}$ berechnen, indem wir das Gleichungssystem

$$A \cdot x = \lambda \cdot x \quad \text{bzw.} \quad (\lambda I_n - A) \cdot x = 0$$

Nach λ auflösen. Dafür können wir das charakteristische Polynom $\chi_A(\lambda)$ aufstellen:

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$$

Alle λ, für die $\chi_A(\lambda) = 0$ gilt, sind Eigenwerte.

Eigenräume

Nun da wir die Eigenwerte unserer Matrix berechnet haben, wollen wir auch die dazugehörigen Eigenvektoren berechnen. Wenn v ein Eigenvektor der Matrix A mit Eigenwert λ ist, dann ist $\mu \cdot v$ für alle $\mu \in K$ auch ein Eigenvektor von A, denn es gilt:

$$A \cdot \mu \cdot v = \mu \cdot A \cdot v = \mu \cdot \lambda \cdot v = \lambda \cdot (\mu \cdot v)$$

Wir berechnen also den Eigenraum zum Eigenwert λ, indem wir folgendes lineares Gleichungssystem lösen:

$$\lambda I_n - A = 0$$

Algebraische und geometrische Vielfachheit

Zwei wichtige Kennzahlen der Eigenwerte sind:

- Algebraische Vielfachheit $m_a(\lambda)$:
  - Gibt an, wie viele Male der Eigenwert λ im charakteristischen Polynom vorkommt

  Beispiel: $\chi_A(\lambda) = (\lambda - 1)^2 \Rightarrow m_a(1) = 2$
- Geometrische Vielfachheit $m_g(\lambda)$:
  - Gibt an, wie viele Vektoren sich in der Basis vom zugehörigen Eigenraum befinden

Grundsätzlich gilt: $1 \leq m_g\ (\lambda) \leq m_a(\lambda) \leq n$

Diagonalisierung

Eine Matrix $A \in K^{n \times n}$ ist diagonalisierbar, wenn für alle Eigenwerte λ gilt:

$$m_g(\lambda) = m_a(\lambda)$$

Wir können dann die Diagonalmatrix $D \in K^{n \times n}$ aufstellen, die auf ihrer Diagonalen die Eigenwerte (mit der Anzahl gegeben durch m_a) hat und die Matrix $S \in K^{n \times n}$, die in ihren Spalten die jeweils zugehörigen Basisvektoren der Eigenräume trägt (Wir führen also einen Basiswechsel zu einer Basis von Eigenvektoren durch).

Es gilt dann $A = SDS^{-1}$, D ist also ähnlich zur Matrix A.

Recap: Linearfaktorzerlegung

Für jede rationale ($\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$) Nullstelle der Polynomfunktion

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

gilt $ggT(a,b) = 1$ und $|a|$ ist Teiler von $|a_0|$ und $|b|$ ist Teiler von $|a_n|$