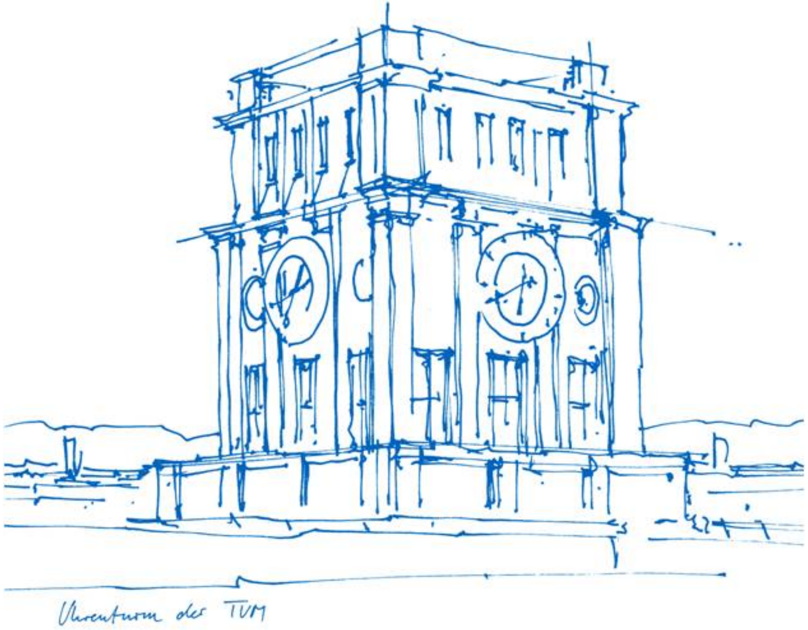
Lineare Algebra für Informatiker – Tutorium KW 26

Jeremias Bohn

Technische Universität München

Fakultät für Mathematik

Garching, 22. Juni 2020



Determinante

Die Determinante einer quadratischen Matrix gibt die Orientierung (Vorzeichen) und das Volumen an, dass durch den Spat der Spaltenvektoren der Matrix erzeugt wird.

Wichtige Rechenregeln (es gilt $A, B \in K^{n \times n}, \lambda \in K$):

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

$$\det(A^T) = \det(A)$$

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}, \text{falls } \det(A) \neq 0$$

$$\det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \cdot \det(A)$$

Determinanten für Matrizen bis $n = 2$

Für Matrix $A \in K^{0\times 0}$:

$$\det(A) = 1$$

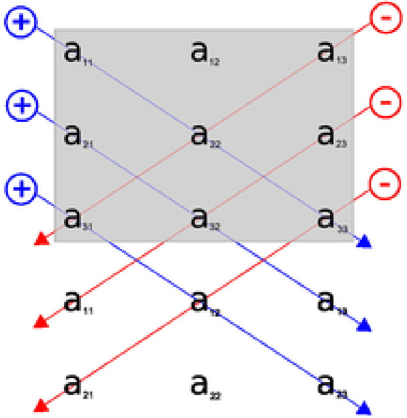
Für Matrix $A \in K^{1\times 1}$:

$$\det(A) = a_{1,1}$$

Für Matrix $A \in K^{2\times 2}$:

$$\det(A) = a_{1,1} \cdot a_{2,2} - a_{1,2} \cdot a_{2,1}$$

Determinante für Matrizen in $K^{3\times 3}$ (Sarrus-Regel)



Determinanten für Matrizen mit $n \geq 4$ (Laplace‘scher Entwicklungssatz)

Wir nutzen den Laplace‘schen Entwicklungssatz, um nach einer Zeile oder einer Spalte zu entwickeln und damit die Determinante einer Matrix in $K^{n\times n}$ in mehrere Determinanten von Matrizen in $K^{(n-1)\times(n-1)}$ aufzubrechen. Formel:

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}\cdot a_{i,j}\cdot \det(A_{ij}) \text{ bzw. } \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}\cdot a_{i,j}\cdot \det\left(A_{ij}\right), \text{ wobei wir jeweils entweder } i \text{ oder } j \text{ fixieren}$$

Wir versuchen hierbei, eine Spalte bzw. Zeile möglichst geschickt zu wählen, sodass $a_{i,j}$ möglichst oft 0 ist (reduziert die Anzahl von Werten, die wir berechnen müssen)

Determinanten von besonderen Matrizen

Sei $A \in K^{n\times n}$ eine obere bzw. untere Dreiecksmatrix. Dann gilt:

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}$$

Sei $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in K^{n\times n}$ eine Blockmatrix mit A, D quadratische Matrizen und entweder B oder C eine Nullmatrix. Dann gilt:

$$\det(X) = \det(A) \cdot \det(D)$$

Sei $A \in K^{n\times n}$ und $\mathrm{A}' \in K^{n\times n}$ eine Matrix, die durch elementare Zeilen- und Spaltenoperationen aus A hervorgegangen ist. Dann gilt:

$$\det(A) = \det(A')$$