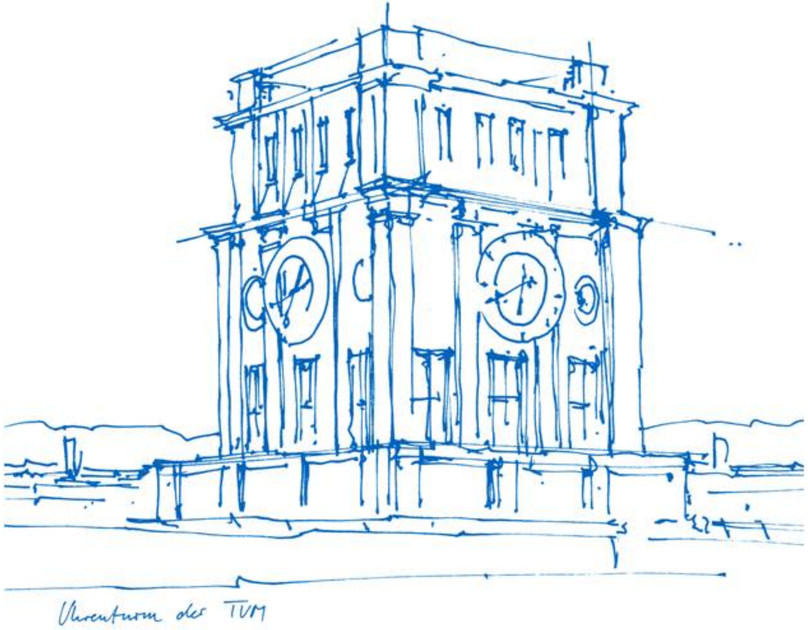
Lineare Algebra für Informatiker – Tutorium KW 25

Jeremias Bohn

Technische Universität München

Fakultät für Mathematik

Garching, 15. Juni 2020



Basiswechselmatrix

Analog zu den Darstellungsmatrizen aus der vorhergehenden Übung können wir uns nun Basiswechselmatrizen definieren:

Sei V ein Vektorraum und B, C Basen von V. Dann nennt man $S_{C,B}$ die Basiswechselmatrix, die Vektoren, die zur Basis B dargestellt sind, in Vektoren, die zur Basis C dargestellt sind, umwandelt.

Beispiel: Sei $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ und $B = \{1, x, x^2\}, C = \{1, x-1, x^2-1\}$.

Das Polynom $f = 1 + x + x^2$ dargestellt zur Basis B ist $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und zur Basis C

$$S_{C,B} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \triangleq 3 \cdot (1) + 1 \cdot (x-1) + 1 \cdot (x^2 - 1) = 1 + x + x^2$$

Rechenregeln für Basiswechselmatrizen

Grundsätzlich gilt $S_{B,C} = (S_{C,B})^{-1}$ für zwei beliebige Basen B, C eines Untervektorraumes V.

Sei nun $\varphi: V \to W$ eine lineare Abbildung und V, W Vektorräume mit jeweils zwei Basen B, B' bzw. C, C'.

Dann gilt allgemein:

$$S_{C',C} \cdot D_{C,B}(\varphi) \cdot S_{B,B'} = D_{C',B'}(\varphi)$$

Ähnlichkeit und Äquivalenz

Zwei Matrizen $A, B \in K^{m \times n}$ heißen äquivalent, falls es $S \in K^{n \times n}, T \in K^{m \times m}$ gibt (und S, T invertierbar), sodass $B = T^{-1}AS$ gilt.

Analog heißen zwei Matrizen $A, B \in K^{n \times n}$ ähnlich, falls es eine Matrix $S \in K^{n \times n}$ gibt (und S invertierbar), sodass $B = S^{-1}AS$ gilt.