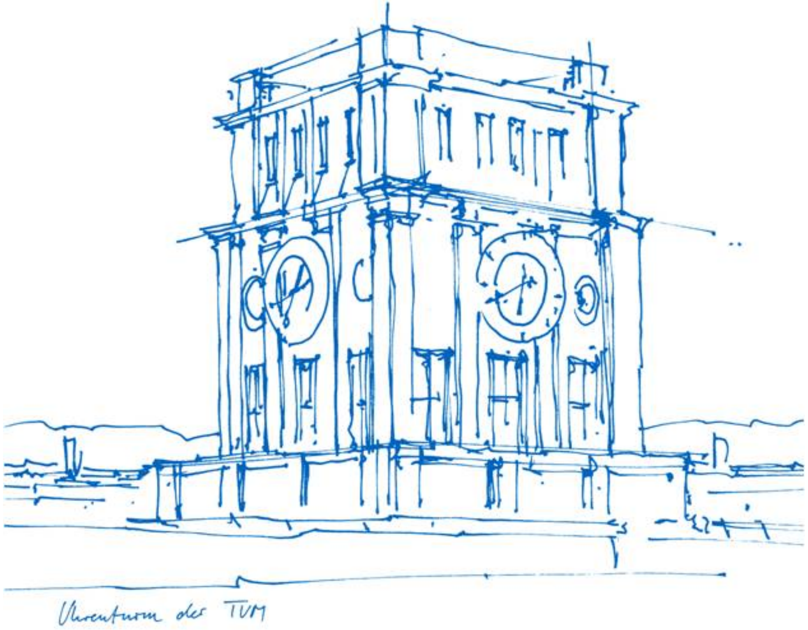
Lineare Algebra für Informatiker – Tutorium KW 23

Jeremias Bohn

Technische Universität München

Fakultät für Mathematik

Garching, 03. Juni 2020



Lineare Abbildung

Seien V, W Vektorräume über dem gleichen Körper K. Dann heißt $\varphi: V \to W$ lineare Abbildung, wenn:

- $\forall v, v' \in V\colon\ \varphi(v + v') = \varphi(v) + \varphi(v')$
- $\forall v \in V, a \in K\colon\ \varphi(a \cdot v) = a \cdot \varphi(v)$

Daraus folgt insbesondere $\varphi(0) = 0$!

Kern und Bild

Sei $\varphi: V \to W$ eine lineare Abbildung.

Dann ist Kern$(\varphi) := \{v \in V \mid \varphi(v) = 0\}$, Bild$(\varphi) := \varphi(V) = \{\varphi(v) \mid v \in V\}$.

Der Kern beschreibt also die Vektoren, die von φ auf 0 abgebildet werden, das Bild alle Vektoren, auf die φ abbildet.

Wichtig sei hier anzumerken, dass φ **injektiv** ist, wenn Kern$(\varphi) = \{0\}$ ist und **surjektiv**, falls $\dim(\mathrm{Bild}(\varphi)) = \dim(W)$. Kern und Bild sind zudem jeweils Unterräume von V bzw. W.

Dimensionssatz

Sei $\varphi: V \to W$ eine lineare Abbildung.

Dann gilt $\dim(V) = \dim(\mathrm{Kern}(\varphi)) + \dim(\mathrm{Bild}(\varphi))$.

Hieraus folgt außerdem, dass φ bijektiv und damit ein **Isomorphismus** ist, falls $\dim(V) = \dim(W)$ und $\mathrm{Kern}(\varphi) = \{0\}$. In diesem Falle existiert daher die **Umkehrfunktion** $\varphi^{-1}: W \to V$.