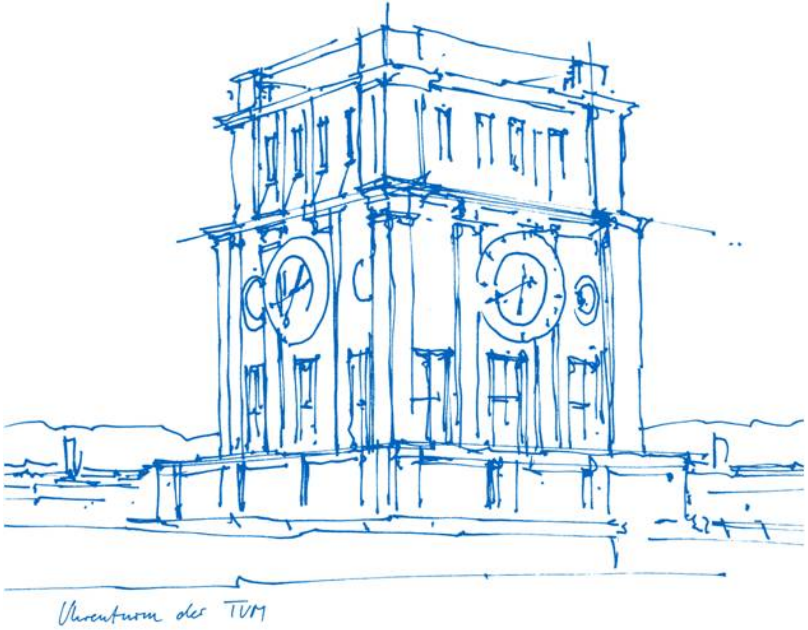
Lineare Algebra für Informatiker – Tutorium KW 21

Jeremias Bohn

Technische Universität München

Fakultät für Mathematik

Garching, 18. Mai 2020



Lineare Unabhängigkeit

Sei K ein Körper und $\mathrm{V} := K^n$ ein Vektorraum, $S \subseteq V$. Dann ist S **linear unabhängig**, wenn gilt:

$$\sum_{s \in S} \lambda_s \cdot s = 0 \iff \forall s\colon \lambda_s = 0$$

Das heißt es gibt keine Linearkombinationen einer beliebigen Teilmenge von S, die sich durch Linearkombinationen der restlichen Vektoren darstellen lassen.

Insbesondere gilt:

$$\max_{S \subseteq K^n,\, S\ lin.\, unabh.} |S| = n$$

Basis

Sei K ein Körper und V ein (Unter-)Vektorraum über K. Dann heißt eine Menge S **Basis von $\boldsymbol{V}$**, wenn

- S ein Erzeugendensystem von V ist (also $\langle S \rangle = V$)
- Alle Vektoren in S **linear unabhängig** sind

Exkurs: Polynominterpolation

Satz von Lagrange: „*Für* $n+1$ *Stützstellen* (a_i, b_i) *gibt es exakt eine Polynomfunktion* f *von Grad* $\leq n$"

Lagranges Interpolationsformel:

Wir berechnen zuerst die sogenannten **Lagrange-Polynome**:

$$\forall i \in 0, \dots, n\colon\ L_i(x) := \prod_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^{n} \frac{x - a_j}{a_i - a_j}$$

Damit gilt dann:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i \cdot L_i(x)$$

Vorteil des Verfahrens: Die Langrange-Polynome sind unabhängig von den Werten b_i, können also wiederverwendet werden!