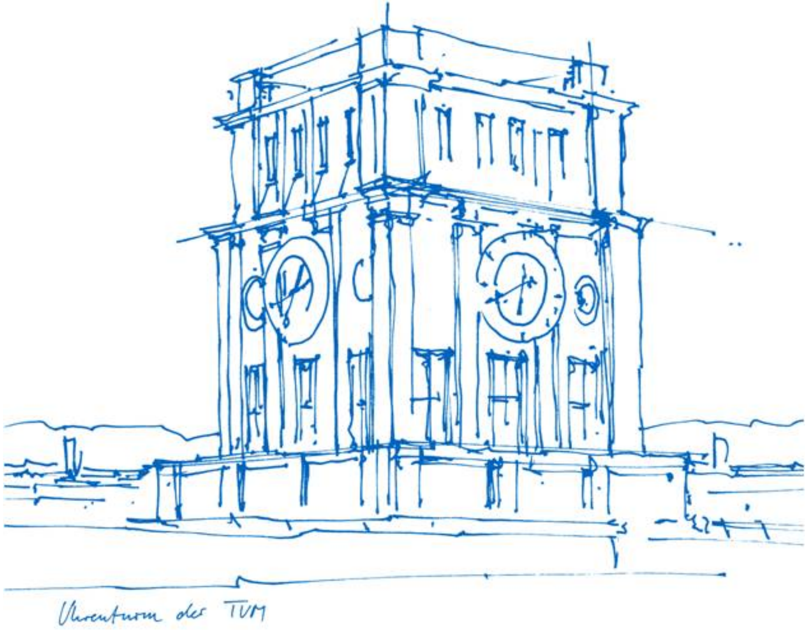
Lineare Algebra für Informatiker – Tutorium KW 20

Jeremias Bohn

Technische Universität München

Fakultät für Mathematik

Garching, 11. Mai 2020



Untervektorraum

Sei K ein Körper und $\mathrm{V} := K^n$ ein Vektorraum. Dann heißt $U \subseteq V$ **Unterraum von $\boldsymbol{V}$**, falls folgendes gilt:

- U ist nicht die leere Menge ($\emptyset$).
- Für zwei Vektoren $v, w \in U$ gilt, dass auch $v + w \in U$.
- Für einen Vektor $v \in U$ und einem Skalar $a \in K$ gilt $a \cdot v \in U$.
  - Daraus folgt direkt, dass der Nullvektor in U enthalten sein muss, denn für ein beliebiges $v \in U$ muss $0 \cdot v = 0 \in U$ gelten.

Erzeugter Untervektorraum

Sei K ein Körper und $\mathrm{V} := K^n$ ein Vektorraum, $S \subseteq V$. Dann heißt $\langle S \rangle$ der durch S **erzeugte Unterraum** von V.

$\langle S \rangle$ enthält dabei alle Vektoren, die sich als Linearkombination der in S enthaltenen Vektoren darstellen lassen. S wird weiterhin als **Erzeugendensystem** des aufgespannten Untervektorraumes bezeichnet.

Exkurs: Vektorräume durch Abbildungen (Funktionen)

Abbildungen der Form $f: K \to K$ bilden einen Vektorraum über dem Körper K. Dabei seien folgende Eigenschaften zu beachten (wir betrachten hier zwei ausgewählte Funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x$; $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto -x$, beide Teil des Vektorraumes $Abb(\mathbb{R}, \mathbb{R})$):

- Die **Nullfunktion**, die Teil jedes UVR eines Abbildungsraumes sein muss, ist die Funktion $\mathbf{0}: x \mapsto 0$.
- $f + g$ ist definiert als $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = x + (-x) = 0 = \mathbf{0}(x)$.
- $a \cdot f$ ist definiert als $(a \cdot f)(x) = a \cdot f(x) = a \cdot x$.