27)

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \qquad v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

a) $A \cdot v = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot v \implies$ EW zu v: 3

b) $$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_3 - A) = \det\begin{pmatrix} \lambda-4 & 3 & -1 \\ -1 & \lambda & -1 \\ -1 & 2 & \lambda-3 \end{pmatrix} +1 = \det\begin{pmatrix} \lambda-4 & 3 & -1 \\ 0 & \lambda-2 & 2-\lambda \\ -1 & 2 & \lambda-3 \end{pmatrix} \leftarrow \cdot 1 : (\lambda-2) = \lambda-2 \cdot \det\begin{pmatrix} \lambda-4 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & \lambda-3 \end{pmatrix} +1$$

$$= (\lambda-2) \cdot \det\begin{pmatrix} \lambda-4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & \lambda-3 \end{pmatrix} \leftarrow = (\lambda-2) \cdot \det\begin{pmatrix} \lambda-4 & 2 \\ -1 & \lambda-3 \end{pmatrix} = (\lambda-2) \cdot \underbrace{\left((\lambda-4)(\lambda-3)+2\right)}_{(\lambda-3)(\lambda-2)} = (\lambda-2)^2(\lambda-3)$$

$\implies$ EW: $\lambda_{1,2} = 2 \qquad \lambda_3 = 3$

c) E_2: $$\left(\begin{array}{ccc|c} 2-4 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 2-3 & 0 \end{array}\right) -1 \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) -2 \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad L = \left\{ \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\implies E_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

E_3: $$\left(\begin{array}{ccc|c} 3-4 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3-3 & 0 \end{array}\right) \cdot(-1) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) -1 \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\implies E_3 = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad L = \left\{ \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

d)

$m_a(\lambda) \neq m_g(\lambda)$

$\Rightarrow$ A ist nicht diagonalisierbar!

28)

A ist invertierbar $\rightarrow$ $\lambda = 0$ KEIN EW von A

$\det(A - \lambda I_n) = 0 \quad \det(A) = 0$ ↯ $\det(A) \neq 0$, weil invertierbar

$v \in K^n \setminus \{0\}: \quad Av = \lambda v$

$$\underbrace{A^{-1} \cdot A}_{I_n} v = A^{-1} \cdot \lambda \cdot v$$

$$v = \lambda \cdot A^{-1} \cdot v$$

$$\lambda^{-1} \cdot v = \underbrace{\lambda^{-1} \cdot \lambda}_{1} \cdot A^{-1} \cdot v$$

$$\lambda^{-1} \cdot v = A^{-1} \cdot v$$

$\Rightarrow \lambda^{-1}$ ein EW von A^{-1}

29 a) $\chi_A(x) = x^5 - x^4 - 16x + 16$

Offensichtliche Nullstelle (oder mit dem „Nullstellenraten" aus DS):

$x = 1$

$\Rightarrow \chi_A(x) = (x-1)(x^4 - 16) =$

$(x-1)(x^2+4)(x^2-4) = (x-1)(x+2)(x-2)(x^2+4) =$

$(x-1)(x+2)(x-2)(x+2i)(x-2i)$

b) Eigenwerte sind:

$x_1 = 1, \quad x_2 = -2, \quad x_3 = 2, \quad x_4 = -2i, \quad x_5 = 2i$

c) $1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda) \quad \forall \lambda$ EW von A

$m_a(\lambda) = 1 \quad \forall \lambda$ EW von A

$1 \leq m_g(\lambda) \leq 1 \quad \forall \lambda$: EW von A

$\Rightarrow m_g(\lambda) = m_a(\lambda) = 1$

$\Rightarrow$ Damit ist A diagonalisierbar