a) $\varphi_1 = \varphi_A$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 11 & 0 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$$

b) $\varphi_2\left(2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \varphi_2\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \Big\} \neq$

$2 \cdot \varphi_2\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

c) $\varphi_3\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

d) $f, g \in \mathbb{R}[x]$ und $\lambda \in \mathbb{R}$

$\varphi_4(f + \lambda g) = (f + \lambda g)(x^2) = f(x^2) + \lambda g(x^2) = \varphi_4(f) + \lambda \varphi_4(g)$

e) $\varphi_5 : \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(z) \\ \mathrm{Im}(z) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(z) \\ -\mathrm{Im}(z) \end{pmatrix} \to \varphi_5(v + v') = \varphi_5(v) + \varphi_5(v')$, $v, v' \in \mathbb{R}^2$ $\varphi_5(a\, v) = a \cdot \varphi_5(v)$, $v \in \mathbb{R}^2$, $a \in \mathbb{R}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ✓

f) $\varphi_6 : z \to \bar{z} \to \varphi_6(z + z') = \varphi_6(z) + \varphi_6(z')$ $z, z' \in \mathbb{C}$, $\varphi_6(a \cdot z) = a \cdot \varphi_6(z)$, $v \in \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{C}$ $\to \varphi_6(i \cdot 1) = -i$, $\neq$

$i \cdot \varphi_6(1) = i \cdot 1 = i$

$\to$ nicht linear!

17 a) $\mathrm{Bild}(\varphi_A) = \{A\, x \mid x \in K^n\} = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ \underbrace{a_{m1}x_1}_{s_1} + \underbrace{a_{m2}x_2}_{s_2} + \dots + \underbrace{a_{mn}x_n}_{s_n} \end{pmatrix} \,\middle|\, x_1, \dots, x_n \in K \right\}$

$= \{x_1 \cdot s_1 + x_2\, s_2 + \dots + x_n \cdot s_n \mid x_1, \dots, x_n \in K\}$

$$\Rightarrow \langle s_1, \dots, s_n \rangle = \mathrm{Bild}(\varphi_A)$$

b) $A \cdot x = 0$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\dim(V) = 4 = \dim(\mathrm{Kern}(\varphi)) + \dim(\mathrm{Bild}(\varphi)) = 2 + 2$$

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

18) U ist ein UVR von V, $0_V \in U$

Da φ linear ist, $0_W = \varphi(0_V) \in \varphi(U)$

Abgeschl. bez. Addition:

$w_1, w_2 \in \varphi(U)$, dann gibt es $u_1, u_2 \in U$,
sodass $\varphi(u_1) = w_1$ $\varphi(u_2) = w_2$

U ist ein UVR $\Rightarrow u_1 + u_2 \in U$

und φ ist lin. Abb. $\Rightarrow \varphi(u_1+u_2) = \varphi(u_1) + \varphi(u_2) = w_1 + w_2$

Abgeschl. bez. skalarer Mult.:

$w \in \varphi(U)$, $\lambda \in K$

$\Rightarrow$ dann $\exists\, u \in U!$ $\varphi(u) = w$ Da U UVR: $\lambda u \in U$

φ linear $\Rightarrow \lambda w = \lambda \cdot \varphi(u) = \varphi(\lambda \cdot u) \in \varphi(U)$

$\Longrightarrow \varphi(U)$ ein UVR von W