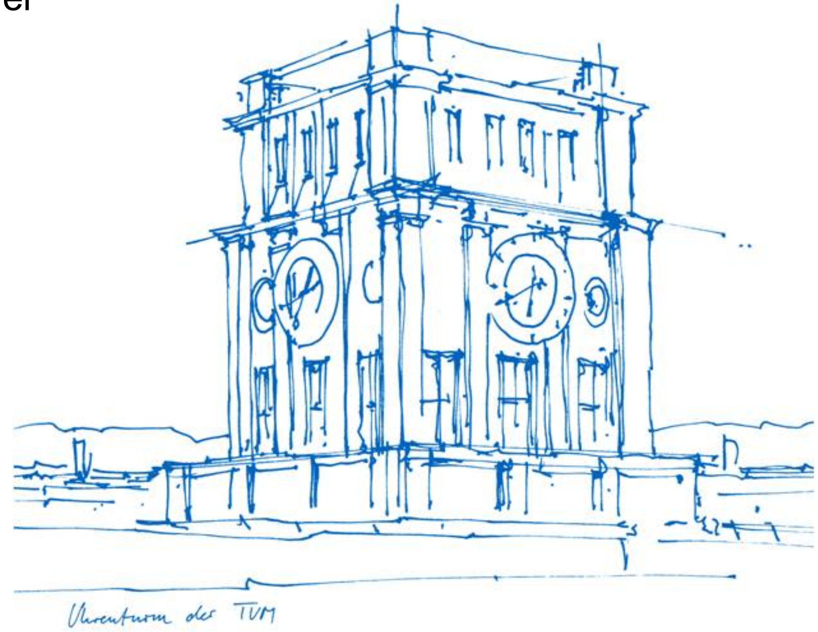
Diskrete Strukturen – Tutorium KW 51

Jeremias Bohn, Evghenii Beriozchin/Manuela Poschenrieder

Technische Universität München

Fakultät für Informatik

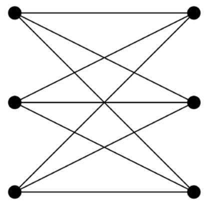
Garching, 17./18. Dezember 2020



Bipartite Graphen

Ein Graph $\mathrm{G} = (V, E)$ heißt **bipartit**, falls es zwei disjunkte Mengen $X, Y \subseteq V$ gibt mit $X \uplus Y = V$ für die gilt, dass kein Element aus X mit einem anderen Element aus X und kein Element aus Y mit einem anderen Element aus Y in Verbindung steht

- Es gilt also $\forall x, x' \in X: (x, x') \notin E, \forall y, y' \in Y: (y, y') \notin E$
- Der vollständige bipartite Graph mit $|X| = m$ und $|Y| = n$ wird mit $K_{m,n}$ bezeichnet
    - Beispiel für den $K_{3,3}$:



Hamiltonkreis

Ein Hamiltonkreis ist ein Pfad über einen Graphen, der jeden Knoten **exakt** einmal besucht

- **Wenn** jeder Knoten mindestens von Grad $\frac{|V|}{2}$ ist, besitzt der Graph einen Hamiltonkreis
- **VORSICHT!** Das bedeutet nicht, dass ein Graph, für den dies nicht gilt, nicht trotzdem einen Hamiltonkreis hat!

  ⇒ **Hinreichendes** Kriterium

Euler-Tour

Ein Pfad, der jede Kante **exakt** einmal besucht, wird Euler-Tour genannt

- Ein Graph enthält **genau dann** eine Euler-Tour, **wenn** jeder Knoten (positiv) geraden Grades ist
    - Mathematisch ausgedrückt: $\forall v \in V\ \exists n \in \mathbb{N}_0 : \deg(v) = 2n$
- Diese Bedingung muss **immer** erfüllt sein

$\Rightarrow$ **Hinreichendes und notwendiges** Kriterium

Minoren

Seien $G = (V, E)$ und $G' = (V', E')$ zwei Graphen. G' heißt **Minor** von von G, wenn wir durch

- Entfernen von Kanten aus G
- Entfernen von Knoten (samt seiner Kanten) aus G
- Verschmelzen von Knoten in G, die durch eine Kante verbunden sind
  - Beim Verschmelzen zweier Knoten $v, w \in V$ mit $\{v, w\} \in E$ werden diese aus V entfernt und ein neuer Knoten vw angelegt sowie $\{v, w\}$ aus E entfernt und jede Kante $\{v, x\} \in E$ bzw. $\{w, x\} \in E$ für $x \in V \setminus \{v, w\}$ durch $\{vw, x\}$ ersetzt

einen zu G' isomorphen Graphen erzeugen können

Planarität

Ein Graph heißt **planar**, wenn wir ihn so zeichnen können, dass sich keine zwei Kanten überschneiden, d.h. für $G = (V, E)$ gibt es eine zweidimensionale Darstellung, sodass jede Zusammenhangskomponente die Grundfläche in höchstens zwei Flächen unterteilt

- **Eulersche Polyederformel**: Sei $G = (V, E)$ ein **zusammenhängender** Graph und f die Anzahl der Flächen, in die G die Ebene mindestens unterteilt. Dann gilt $f - |E| + |V| = 2$
  - f ist allein durch E und V bestimmbar!
- **Satz von Kuratowski**: Ein einfacher Graph ist **genau dann** planar, **wenn** er weder den K_5 noch den $K_{3,3}$ als Minoren besitzt

  ⇒ **Hinreichendes und notwendiges** Kriterium

Formelsammlung Graphen

Hinreichende und notwendige Kriteria

- Graph ist bipartit gdw. es keinen Kreis ungerader Länge ist
- Ein Graph enthält eine Euler-Tour gdw. jeder Knoten (positiv) geraden Grades ist
- Ein Graph ist planar, wenn er weder den K_5 noch den $K_{3,3}$ als Minoren enthält
- Handshake-Lemma: Für jeden Graphen $G = (V, E)$ gilt $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$
- Ein Baum mit mindestens zwei Knoten hat auch mindestens zwei Blätter

Nur hinreichende Kriteria

- Ein Graph besitzt einen Hamiltonkreis, wenn jeder Knoten mindestens von Grad $|V|/2$ ist
- Für jeden Baum $B = (V, E)$ gilt $|V| = |E| + 1$
- Perfekte Binärbäume haben 2^h Blätter und $2^{h+1} - 1$ Knoten
- Ein zusammenhängender Graph ist planar, wenn $f \leq 2$ (Bestimmung mittels EPF)