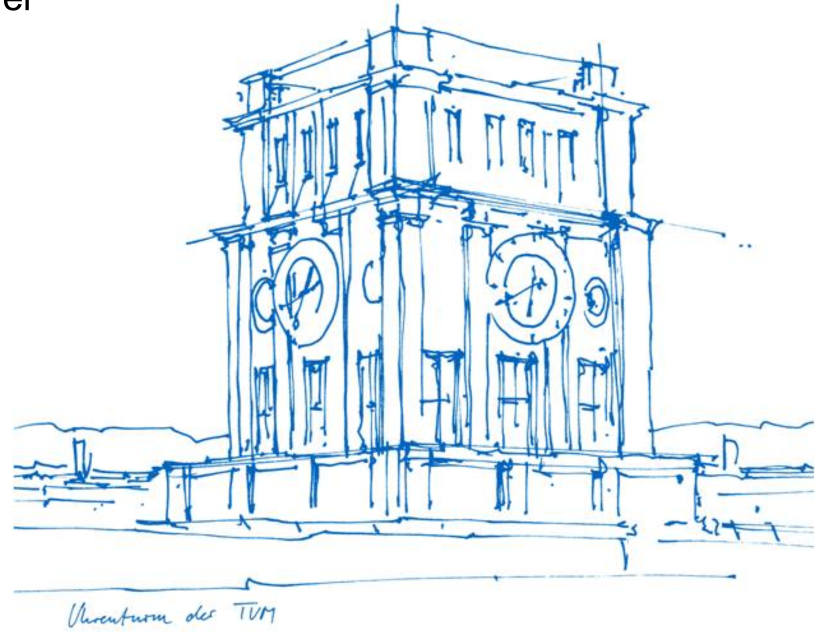
Diskrete Strukturen – Tutorium KW 49

Jeremias Bohn, Evghenii Beriozchin/Manuela Poschenrieder

Technische Universität München

Fakultät für Informatik

Garching, 03./04. Dezember 2020



Graphen

Ein Graph ist definiert als Tupel $G := (V, E)$

- V ist eine Menge von Knoten (*vertices*)
- E ist eine Menge von Kanten (*edges*)
    - analog zu den Relationen bestehend aus 2-Tupeln von Knoten

Funktionen

Eine Funktion $f: A \rightarrow B$ ist eine Relation, bei der **alle** Elemente aus A mit **genau einem** Element aus B in Relation stehen (man sagt, f bildet von A auf B ab)

- Wichtige Eigenschaften:
  - f heißt **surjektiv**, wenn auf jedes Element aus B mindestens einmal abgebildet wird
  - f heißt **injektiv**, wenn auf jedes Element aus B höchstens einmal abgebildet wird
  - f heißt **bijektiv**, wenn surjektiv und injektiv
- **Funktionskomposition**: Für zwei Funktionen $f: A \rightarrow B,\ g: B \rightarrow C$ bezeichnet $g \circ f$ die Funktion, die ein Element aus A entgegennimmt und darauf zuerst f und dann g anwendet. $g \circ f$ heißt auch **Komposition**

Bild und Urbild

- Das **Bild von $\boldsymbol{f}$** (Rng(f)) ist die Menge aller Elemente, auf die f abbildet ($\{f(a) \mid a \in A\}$)
- Das **Urbild von $\boldsymbol{f}$** (Dom(f)) ist die Menge A

Vorsicht!

- $f^{-1}(A)$ bezeichnet die **Urbildmenge**, $f(A)$ die **Bildmenge**
- $f^{-1}(a)$ bezeichnet die **Umkehrfunktion** bezüglich f von a

Induktionsbeweis

Die Induktion ist ein rekursiver Beweis einer Aussage und folgt einem bestimmten Muster:

- **Behauptung**: Die zu beweisende Aussage
- „Beweis mittels Induktion nach …“

Induktionsbeweis

Die Induktion ist ein rekursiver Beweis einer Aussage und folgt einem bestimmten Muster:

- **Behauptung**: Die zu beweisende Aussage
- „Beweis mittels Induktion nach …“
- **Induktionsbasis**: Zeigen der *Behauptung* für fixierte Werte

Induktionsbeweis

Die Induktion ist ein rekursiver Beweis einer Aussage und folgt einem bestimmten Muster:

- **Behauptung**: Die zu beweisende Aussage
- „Beweis mittels Induktion nach …“
- **Induktionsbasis**: Zeigen der *Behauptung* für fixierte Werte
- **Induktionsschritt**: „Sei … beliebig, aber fest“
  - **Induktionsannahme**: „Für das fixierte … gilt:“ *Behauptung*
  - **Induktionsbehauptung**: „Für das fixierte … gilt:“ *Behauptung*, aber für den Nachfolger des Elementes aus der *I.A.*

Induktionsbeweis

Die Induktion ist ein rekursiver Beweis einer Aussage und folgt einem bestimmten Muster:

- **Behauptung**: Die zu beweisende Aussage
- „Beweis mittels Induktion nach …"
- **Induktionsbasis**: Zeigen der *Behauptung* für fixierte Werte
- **Induktionsschritt**: „Sei … beliebig, aber fest"
  - **Induktionsannahme**: „Für das fixierte … gilt:" *Behauptung*
  - **Induktionsbehauptung**: „Für das fixierte … gilt:" *Behauptung*, aber für den Nachfolger des Elementes aus der *I.A.*
  - **Beweis der Induktionsbehauptung**:
    - Umformen, sodass sich eine Seite der *Induktionsannahme* im Term findet
    - Ersetzen durch die andere Seite der *Induktionsannahme*
    - Ggf. weiter umformen, bis Gleichheit der beiden Seiten der *Induktionsbehauptung* gezeigt ist

Kardinalität & Abzählbarkeit

Für eine beliebige Menge A heißt $|A|$ die **Kardinalität** von A

- Im Falle einer endlichen Menge bezeichnet $|A|$ die Anzahl der Elemente in A
- Es gilt $|A| \leq |B|$ für zwei beliebige Mengen A, B genau dann, wenn es eine injektive Funktion $f: A \rightarrow B$ gibt
- **Satz von Cantor**: Es gilt stets $|A| < |\mathcal{P}(A)|$ für jede beliebige Menge A

Eine Menge A heißt **abzählbar**, wenn $|A| \leq \mathbb{N}$

- Disclaimer: Manchmal wird *abzählbar* auch mit *unendlich abzählbar* gleichgesetzt, also wenn $|A| = \mathbb{N}$
- Eine Menge B, für die $|B| \geq \mathbb{N}$ gilt, wird **überabzählbar** genannt
    - Beispiele: $\mathbb{R}$, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$