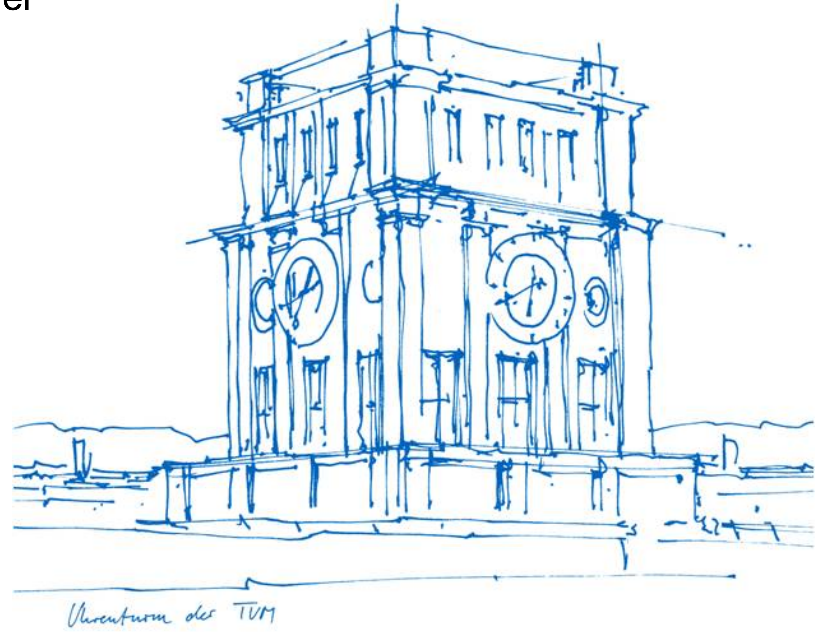
Diskrete Strukturen – Tutorium KW 47

Jeremias Bohn, Evghenii Beriozchin/Manuela Poschenrieder

Technische Universität München

Fakultät für Informatik

Garching, 19./20. November 2020



Tupel und Mengen

- Mengen: **ungeordnet**, **keine** Duplikate
  - Darstellung: $\{\ldots\}$
  - Beispiele: Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$, das Alphabet der Kleinbuchstaben $\{a, b, c, \ldots, z\}$

- Tupel: **geordnet**, Duplikate **möglich**
  - Darstellung: $(\ldots)$
  - Einzelne Elemente des Tupels sind Elemente einer Grundmenge
  - Beispiele: Ein einzelnes Wort der deutschen Sprache, Relationen

(Homogene, binäre) Relationen

- Eine Menge von (zwei-elementigen) Tupeln über einer Grundmenge A
  - Mathematische Schreibweise: $R \subseteq A \times A$

- Lässt sich für endliche Mengen A normalerweise als Graph realisieren

- Für zwei Relationen $R, S \subseteq A \times A$ nennen wir $RS = \{(a, c) \mid \text{es existiert } b, \text{sodass } (a, b) \in R, (b, c) \in S\}$ das **relationale Produkt** von R und S
  - Vorsicht: Das relationale Produkt ist in der Regel nicht kommutativ, d.h. $RS \neq SR$

Relationseigenschaften

Für eine Relation R:

- Symmetrie: Wenn $(a, b) \in R$, dann auch $(b, a) \in R$
- Antisymmetrie: Wenn $(a, b), (b, a) \in R$, dann $a = b$
- Asymmetrie: Wenn $(a, b) \in R$, dann $(b, a) \notin R$
- Reflexivität: Für alle a gilt: $(a, a) \in R$
- Transitivität: Wenn $(a, b), (b, c) \in R$, dann auch $(a, c) \in R$

Besondere relationale Produkte

Für eine Relation $R \subseteq A \times A$:

- R^0: Nur reflexive Kanten
- $R^1 = R^0 R = R$
- $R^2 = RR$: $\{(a, c) \mid$ es gibt ein b, sodass $(a, b) \in R$ und $(b, c) \in R\}$
- $R^+ = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} R^k$: Transitive Hülle
- $R^* = \bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} R^k = R^+ \cup R^0$: Reflexiv-transitive Hülle

Äquivalenzrelation

- Eigenschaften
  - Reflexiv
  - Symmetrisch
  - Transitiv
- Äquivalenzklassen
  - In Äquivalenzrelationen bilden sich Gruppen von Elementen, die alle mit einander in Verbindung stehen
  - Diese Gruppen werden Äquivalenzklassen genannt
- Repräsentantensystem
  - Eine Menge von Elementen, in der jedes Element für eine Äquivalenzklasse einer zugehörigen Äquivalenzrelation steht
  - Keine zwei Elemente stehen für die gleiche Äquivalenzklasse!
  - Der Repräsentant einer Äquivalenzklasse muss Element dieser Klasse sein

Ordnungsrelation

- Eigenschaften
  - Reflexiv
  - Antisymmetrisch
  - Transitiv
- Partielle und totale Ordnung:
  - Eine Ordnungsrelation, in der alle Elemente auf irgendeine Weise in Relation stehen, heißt **total**, ansonsten **partiell**
- Hasse-Diagramm
  - Definiert eine Ordnung ohne „triviale“ Kanten, also den reflexiven und transitiven
  - vgl. mit dem Zahlenstrahl für die natürlichen Zahlen