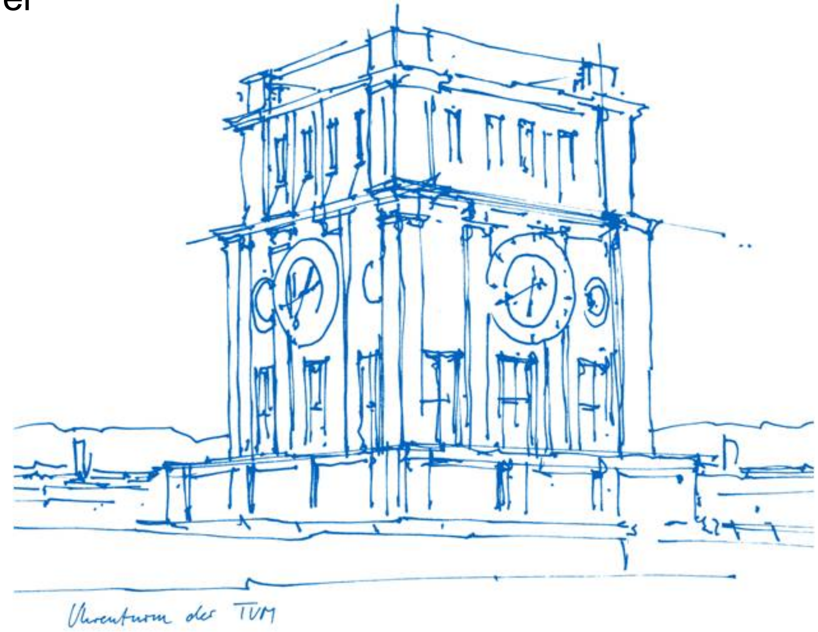
Diskrete Strukturen – Tutorium KW 06

Jeremias Bohn, Evghenii Beriozchin/Manuela Poschenrieder

Technische Universität München

Fakultät für Informatik

Garching, 4./5. Februar 2021



Partitionierungen

Verteilung von n unterscheidbaren Objekten auf k Kategorien:

- Nicht unterscheidbare Kategorien: Stirlingzahlen der 2. Ordnung $S_{n,k}$ (Anzahl der Äquivalenzrelationen)
  - $S_{n,k} \coloneqq S_{n-1,k-1} + k \cdot S_{n-1,k}$ für $n > k > 0$
  - $S_{n,0} \coloneqq 0$ für $n > 0$
  - $S_{n,n} \coloneqq 1$
- Unterscheidbare Kategorien:
  - $|F_{k,n}| = |\{(s_1, \ldots, s_n) \in [k]^n \mid |\{s_1, \ldots, s_n\}| = k\}| = k! \cdot S_{n,k}$
- Nicht unterscheidbare Kategorien mit vorgegebenen Partitionsgrößen (Anzahl der Äquivalenzrelationen, wenn Äquivalenzklassengrößen fixiert):
  - $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ mit $\sum_{i=1}^{k} i \cdot \lambda_i = n$, wobei λ_i die Anzahl der i-elementigen Klassen angibt:

$$\frac{n!}{\prod_{i=1}^{k} (i!)^{\lambda_i} \cdot \lambda_i}$$

Partitionierungen (ff.)

Verteilung von n nicht unterscheidbaren Elementen auf k Klassen (jede Klasse nicht leer):

- Klassen unterscheidbar: Geordnete Zahlpartition
  - $|G_{n,k}| = \binom{n-1}{k-1}$
- Klassen nicht unterscheidbar: Ungeordnete Zahlpartition
  - $|P_{n,k}| = |P_{n-1,k-1}| + |P_{n-k,k}|$
  - $|P_{n,0}| = 0$, falls $n > 0$
  - $|P_{n,k}| = 0$, falls $k > n$
  - $|P_{n,n}| = 1$

Stirlingzahlen 1. Art

Anzahl der Permutationen über $[n]$ mit genau k Zykeln

- $s_{n,k} \coloneqq s_{n-1,k-1} + (n-1) \cdot s_{n-1,k}$ für $n > k > 0$
- $s_{n,0} \coloneqq 0$ für $n > 0$
- $s_{n,n} \coloneqq 1$

Siebformel

Sei $X \coloneqq \bigcup_{i=1}^{m} Y_i$.

Dann gilt:

$$|X| = \sum_{r=1}^{m} (-1)^{r-1} \sum_{I \subseteq [m]:\, |I|=r} \left| \bigcap_{i \in I} Y_i \right|$$