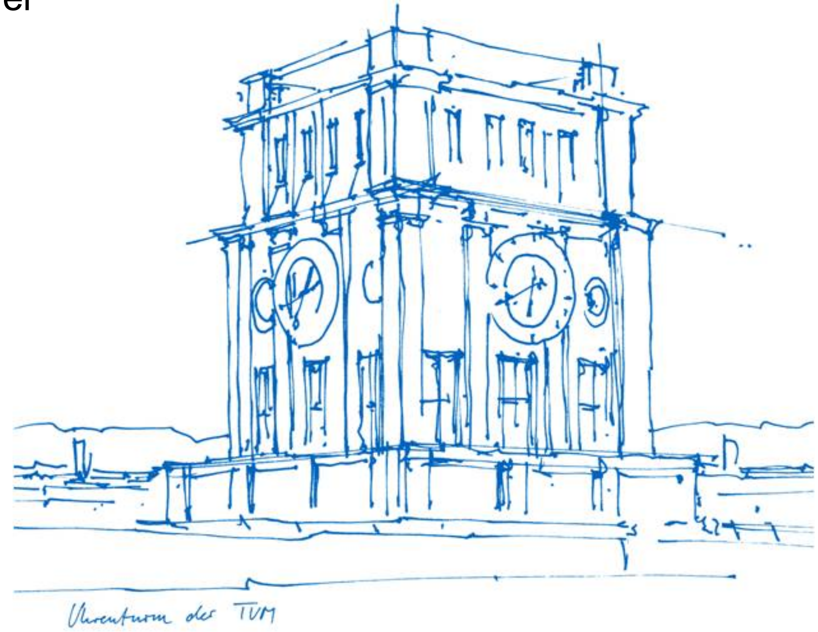
Diskrete Strukturen – Tutorium KW 03

Jeremias Bohn, Evghenii Beriozchin/Manuela Poschenrieder

Technische Universität München

Fakultät für Informatik

Garching, 14./15. Januar 2021



Logik: Standardäquivalenzen

Für beliebige aussagenlogische Formeln F, G, H gilt:

- Idempotenz: $F \vee F \equiv F$, $F \wedge F \equiv F$
- Kommutat.: $F \wedge G \equiv G \wedge F$, $F \vee G \equiv G \vee F$
- Assoziativität: $F \vee (G \vee H) \equiv (F \vee G) \vee H$, $F \wedge (G \wedge H) \equiv (F \wedge G) \wedge H$
- Absorption: $F \wedge (F \vee G) \equiv F$, $F \vee (F \wedge G) \equiv F$
- Distributivität: $F \wedge (G \vee H) \equiv (F \wedge G) \vee (F \wedge H)$ $F \vee (G \wedge H) \equiv (F \vee G) \wedge (F \vee H)$
- Doppelnegat: $\neg\neg F \equiv F$
- De Morgan: $\neg(F \wedge G) \equiv (\neg F \vee \neg G)$ $\neg(F \vee G) \equiv (\neg F \wedge \neg G)$
- Triv. Kontradik.: $F \wedge \neg F \equiv \text{false}$
- Triv. Tautolog.: $F \vee \neg F \equiv \text{true}$
- Dominanz: $F \vee \text{true} \equiv \text{true}$ $F \wedge \text{false} \equiv \text{false}$
- Identität: $F \wedge \text{true} \equiv F$ $F \vee \text{false} \equiv F$

Logik: Standardäquivalenzen (ff.)

Für beliebige aussagenlogische Formeln F, G, H gilt:

- Implikation: $F \rightarrow G \equiv \neg F \vee G$
- XOR: $F \oplus G \equiv (F \vee G) \wedge (\neg F \vee \neg G) \equiv (\neg F \wedge G) \vee (\neg G \wedge F)$
- Bikonditional: $F \leftrightarrow G \equiv (F \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow F) \equiv (\neg F \vee G) \wedge (\neg G \vee F) \equiv \neg(F \oplus G)$

Logik: Belegungen

Eine Belegung $\beta : V' \to \{0,1\}$ für $V' \subseteq V$ ist eine Funktion, die jeder aussagenlogischen Variable in V' einen Wahrheitswert zuweist

- β heißt **passende Belegung** von F, wenn $V_F \subseteq V'$, also jede Variable aus F durch β eine Zuweisung erhält
- β heißt **minimale Belegung** von F, wenn $V_F = V'$, also ausschließlich alle Variablen aus F durch β eine Zuweisung erhalten
- $[F](\beta)$ heißt **Wahrheitswert** von F bezüglich Belegung β

Anwendung: KNFs und DNFs aus Belegungen

Wir können für jede bel. aussagenlogische Formel F eine KNF oder DNF generieren:

- DNF:
  - Seien $\beta_1, \dots \beta_n$ alle Belegungen, für die gilt: $[F](\beta_i) = 1$
  - Dann ist die DNF für F gegeben durch $\bigvee_{i=1}^{n} \left(\bigwedge_{v \in V_F} \begin{cases} \neg v, & \text{falls } \beta_i(v) = 0 \\ v, & \text{falls } \beta_i(v) = 1 \end{cases} \right)$
- KNF:
  - Seien $\beta_1, \dots \beta_n$ alle Belegungen, für die gilt: $[F](\beta_i) = 0$
  - Dann ist die KNF für F gegeben durch $\neg \bigvee_{i=1}^{n} \left(\bigwedge_{v \in V_F} \begin{cases} \neg v, & \text{falls } \beta_i(v) = 0 \\ v, & \text{falls } \beta_i(v) = 1 \end{cases} \right) \equiv \bigwedge_{i=1}^{n} \left(\bigvee_{v \in V_F} \begin{cases} v, & \text{falls } \beta_i(v) = 0 \\ \neg v, & \text{falls } \beta_i(v) = 1 \end{cases} \right)$

Recap: Relationseigenschaften

Für eine Relation R:

- Symmetrie: Wenn $(a, b) \in R$, dann auch $(b, a) \in R$
- Antisymmetrie: Wenn $(a, b), (b, a) \in R$, dann $a = b$
- Asymmetrie: Wenn $(a, b) \in R$, dann $(b, a) \notin R$
- Reflexivität: Für alle a gilt: $(a, a) \in R$
- Transitivität: Wenn $(a, b), (b, c) \in R$, dann auch $(a, c) \in R$