

Aufgabe 6.1

Sei $G = (V, E)$ ein einfacher endlicher Graph mit $\deg(v) \geq 4$ für alle $v \in V$. Insbesondere gilt also $|V| \geq 5$.

(a) Zeigen Sie, dass $|E| \geq 2|V|$ gilt.

(b) Es gibt stets vier paarweise verschiedene Knoten $\{u, v, x, y\}$ in G mit $\{u, v\} \in E$ und $\{x, y\} \in E$.

(c) Zeigen Sie: Für alle $n \geq 5$ gibt es einen zusammenhängenden 4-regulären Graph mit $|V| = n$ Knoten.

a)

$$2|E| = \sum_{v \in V} \deg(v)$$

$$\sum_{v \in V} \deg(v) \geq 4|V|$$

$$2|E| \geq 4|V|$$

$$|E| \geq 2|V|$$

b)

- wir wählen $u \in V$ beliebig
- wir wählen $v \in \Gamma(u)$, da $\deg(u) \geq 4$ finden wir ein solches v
- wir wählen $x \in V \setminus \{u, v\}$, da $|V| \geq 5$, finden wir ein solches x
- wir wählen $y \in \Gamma(x) \setminus \{u, v\}$, da $\deg(x) \geq 4$, finden wir ein solches y
- nun sind $\{u, v\}$ und $\{x, y\} \in E$
und u, v, x, y sind paarweise verschieden

c) wir zeigen mittels Induktion nach $n \in \mathbb{N}$ für $n \geq 5$:

„Es gibt einen zusammenhängenden 4-regulären Graphen mit genau n Knoten“

Induktionsbasis: für $n=5$: der Graph ist der K_5 , dieser ist zusammenhängend und 4-regulär.

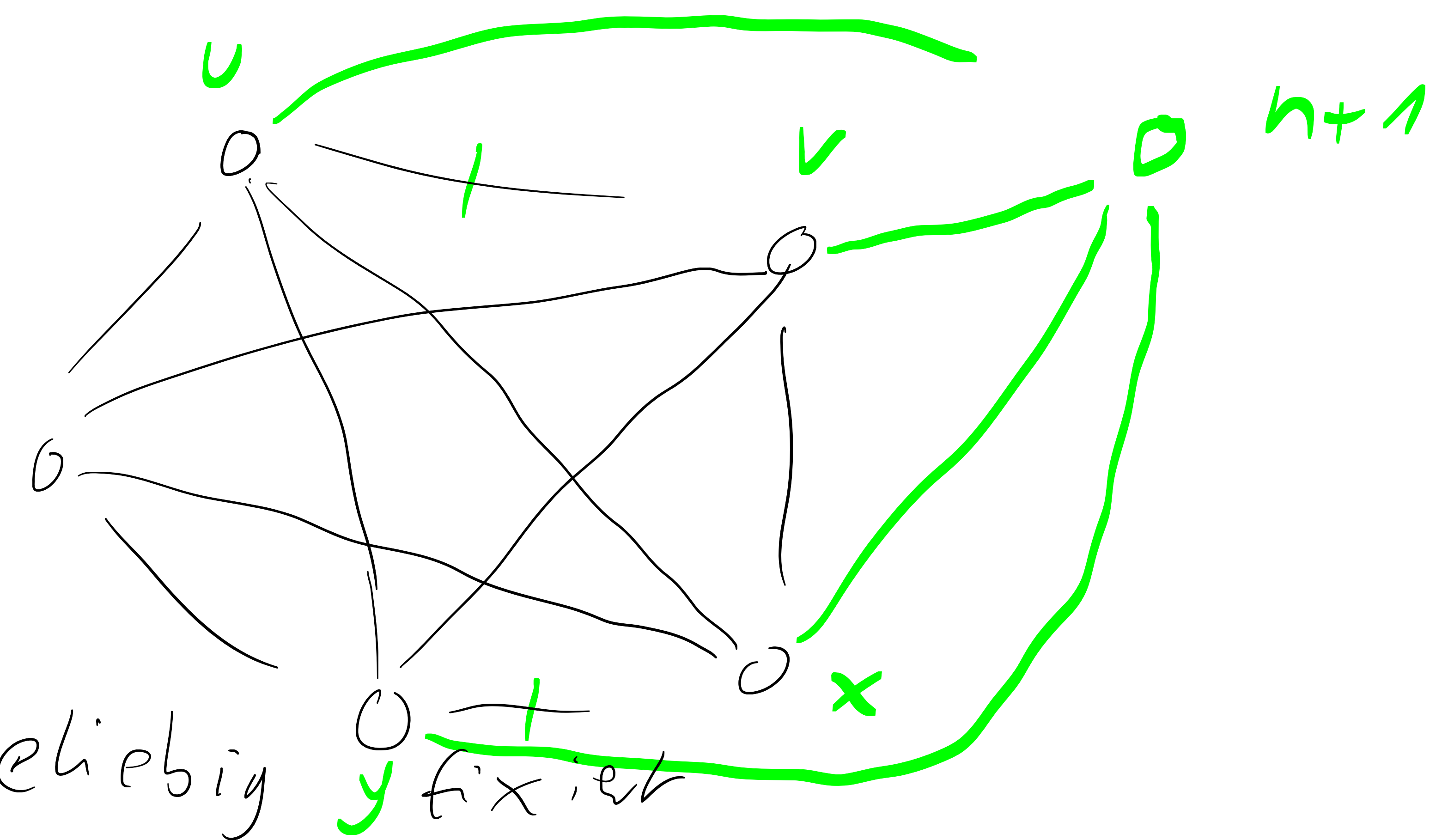
Induktionsschritt: sei $n \in \mathbb{N}$ für $n \geq 5$ beliebig y fixiert

Induktionsannahme: G ist ein zusammenhängender, 4-regulärer Graph, mit n Knoten, $|V| = [n]$

Induktionsbehauptung: es gibt einen zusammenhängenden, 4-regulären Graphen G' mit $n+1$ Knoten

Beweis der Induktionsbehauptung: wir konstruieren aus dem durch die Annahme gegebenen Graphen G den Graphen G' mit $V' = [n+1]$

Seien x, y, u, v vier paarweise verschiedene Knoten, mit $\{u, v\}, \{x, y\} \in E$
nach 5) finden wir diese.



wir definieren $E' = \{ \{n+1, u\}, \{n+1, v\}, \{n+1, x\}, \{n+1, y\} \} \cup$
 $(E \setminus \{ \{u, v\}, \{x, y\} \})$

G' ist zusammenhängend, da wir für einen Pfad π in G sagen können:

- falls π die Kanten $\{u, v\}$ und $\{x, y\}$ nicht nutzt ist π auch in G' enthalten
- falls π die Kanten $\{u, v\}$ und $\{x, y\}$ nutzt, können wir diese ersetzen durch $\{u, n+1\}$ $\{n+1, v\}$ bzw. $\{x, n+1\}$ $\{n+1, y\}$

2a)

$$2|E| = \sum_{v \in V} \deg(v) = 18$$

$$\rightarrow |E| = 9$$

K_5 : $|E| = \sum_{i=1}^4 i = 10 \rightarrow$ mehr Kanten als unser Graph $\Rightarrow$ kann kein Minor sein!

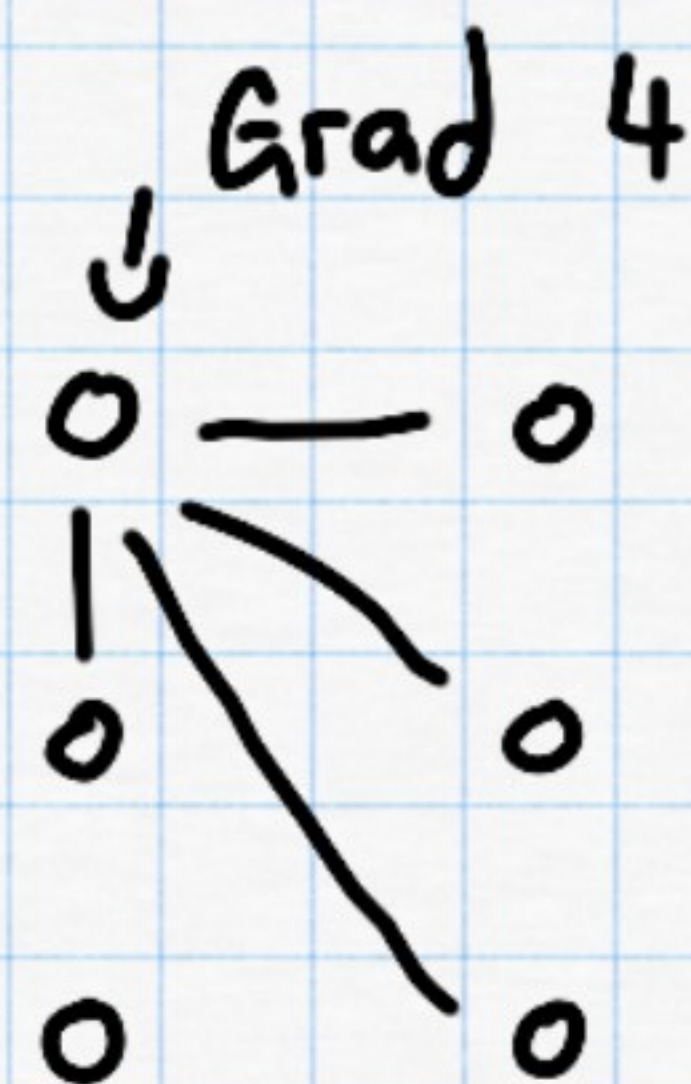
$K_{3,3}$: $|E| = \sum_{i=1}^3 3 = 9 \rightarrow$ wir können keine Kanten aus unserem Graphen entfernen

$(1, 3, 3, 3, 4, 4) \rightarrow K_{3,3}$ kann kein Minor sein
 $\uparrow$

$\Rightarrow K_5$ und $K_{3,3}$ keine Minoren

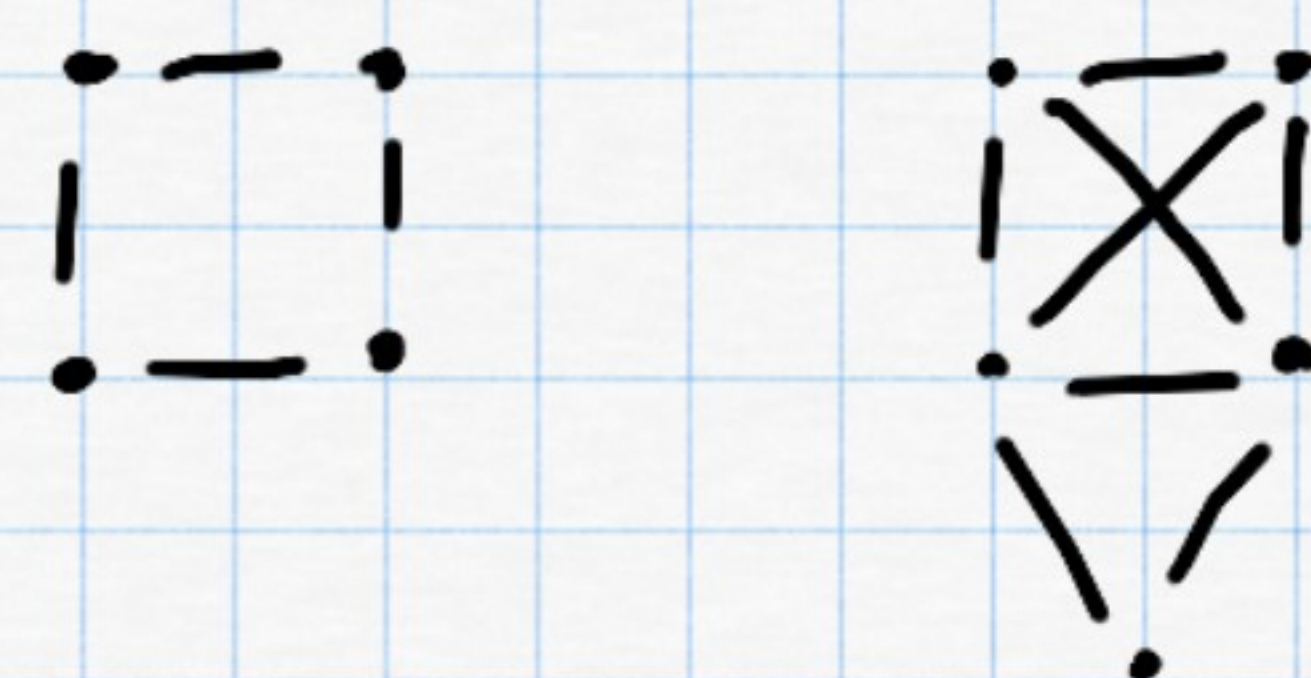
$\Rightarrow$ Graph immer planar

b)



$\uparrow$
 kann nicht Grad 0 sein, muss mindestens einen gemeinsamen Nachbarn mit Grad-4-Knoten haben
 $\Rightarrow$ alle in einer Zsg.komp.

c)



kein Eulertour möglich

d) $(1, 1, 1, 1, 1, 2, 3)$

Für jeden Baum gilt:

$$|V| = |E| + 1$$

$$7 \stackrel{?}{=} \frac{1}{2} \sum_{v \in V} \deg(v) + 1$$

$$7 \neq 5 + 1 = 6$$

$\Rightarrow$ kein Baum!