

Aufgabe 5.1

- (a) In der Vorlesung haben Sie einen ersten Induktionsbeweis für die Behauptung gesehen, dass der perfekte Binärbaum B_h der Höhe h genau 2^h viele Blätter hat.

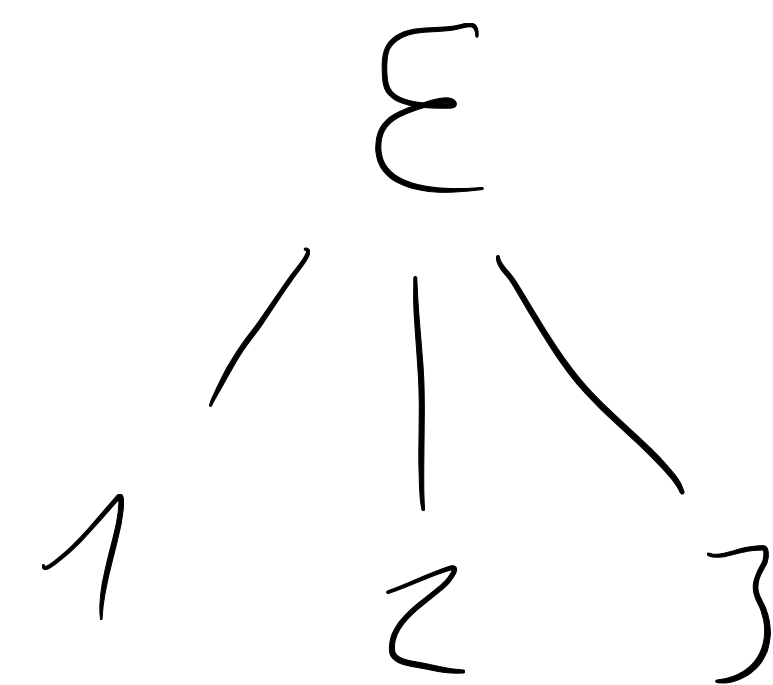
Der perfekte Ternärbaum der Höhe h ist durch $T_h := ([3]^{\leq h}, \{\{u, ux\} \mid u \in [3]^{<h}, x \in [3]\})$ definiert, wobei $[3]^{\leq h} = \{w \in \{1, 2, 3\}^* : |w| \leq h\}$ die Menge aller Wörter über dem Alphabet $[3] = \{1, 2, 3\}$ ist, welche maximal Länge h haben.

Passen Sie den Induktionsbeweis entsprechend an, um zu zeigen, dass der T_h genau 3^h viele Blätter hat.

- (b) Adaptieren Sie auch das Lemma über die Anzahl der Knoten des B_h auf den T_h an. Geben Sie wieder einen Induktionsbeweis.

a) Beweis mittels Induktion nach $h \in \mathbb{N}$:
Induktionsbasis:

T_1 hat 3^1 Blätter



Induktionsschritt: sei nun $h \in \mathbb{N}$ beliebig fixiert

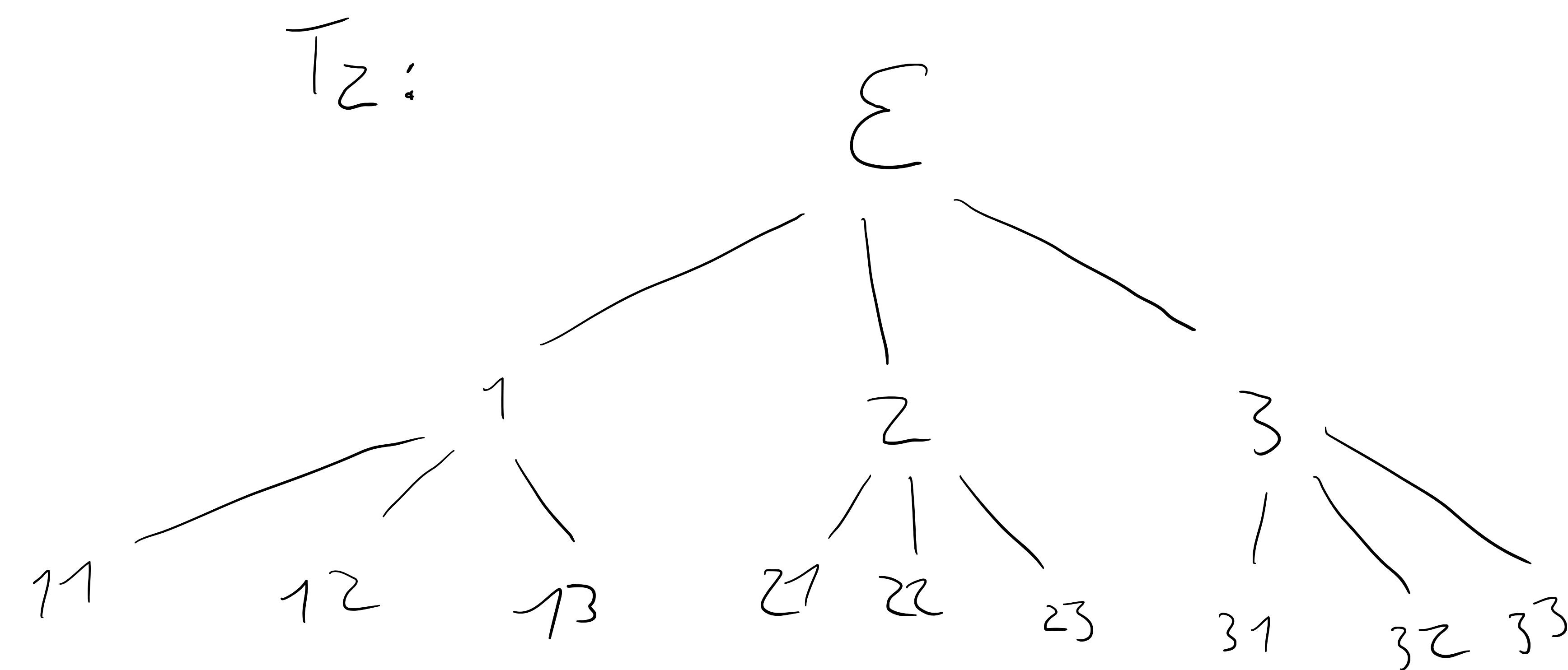
Induktionsannahme: der T_h hat 3^h Blätter

Induktionsbehauptung: der T_{h+1} hat 3^{h+1} Blätter

Beweis der Induktionsbehauptung:

• $v \in [3]^{\leq h}$ hat mind. 3 Nachbarn, also ist $\deg(v) \geq 3$, also sind die Knoten v keine Blätter

• $x \in [3]^{h+1}$, $x = va$, $v \in [3]^h$, $a \in [3]$, x hat nur genau einen Nachbarn, den Knoten v , also gilt $\deg(x) = 1$, die Knoten x sind also Blätter



• nach Annahme: T_h hat 3^h Blätter, aus jedem dieser Blätter erhalten wir 3 neue Blätter des T_{h+1} , also hat T_{h+1} $3^h \cdot 3 = 3^{h+1}$ Blätter, was zu zeigen war

Somit gilt die Induktionsbehauptung

$$\sum_{k=0}^h 3^k = \frac{3^{h+1} - 1}{2} \quad \text{viele Knoten}$$

b) Beweis mittels Induktion nach $h \in \mathbb{N}_0$:

Induktionsbasis: für $h=0$ gilt: $T_0 = \{\{E\}, \emptyset\}$
viele Knoten

$$T_0 \text{ hat } \frac{3^0 - 1}{2}$$

Induktionsschritt: sei $h \in \mathbb{N}_0$ beliebig fixiert

Induktionsannahme: T_h hat $\frac{3^{h+1} - 1}{2}$ Knoten

Induktionsbehauptung: T_{h+1} hat $\frac{3^{h+2} - 1}{2}$ Knoten

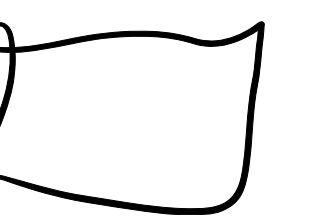
Beweis der Induktionsbehauptung: die Knoten des T_{h+1} sind $[3]^{\leq h+1} = [3]^{\leq h} \cup [3]^{h+1}$,

• die Menge $[3]^{\leq h}$ ist die Knotenmenge von T_h , T_h hat nach Annahme $\frac{3^{h+1} - 1}{2}$ viele Knoten, also gilt $|[3]^{\leq h}| = \frac{3^{h+1} - 1}{2}$

• die Menge $[3]^{h+1}$ sind die Blätter des T_{h+1} , aus a) ist bekannt;
 $|[3]^{h+1}| = 3^{h+1}$

$$\begin{aligned}
 [3]^{\leq k} \cap [3]^{k+1} &= \emptyset, \text{ das hei\u00dft } |[3]^{\leq k+1}| = \underbrace{|[3]^{\leq k}|}_{= \frac{3^{k+1}-1}{2}} + |3^{k+1}| \\
 &= \frac{3^{k+1}-1 + 2 \cdot 3^{k+1}}{2} \\
 &= \frac{3 \cdot 3^{k+1}-1}{2} \\
 &= \frac{3^{k+2}-1}{2} \quad \text{was zu zeigen war.}
 \end{aligned}$$

Damit gilt die Induktionsbehauptung



2a)

$\text{id}, (3,4), (6,8)(1,7), (1,7)(6,8)(3,4)$

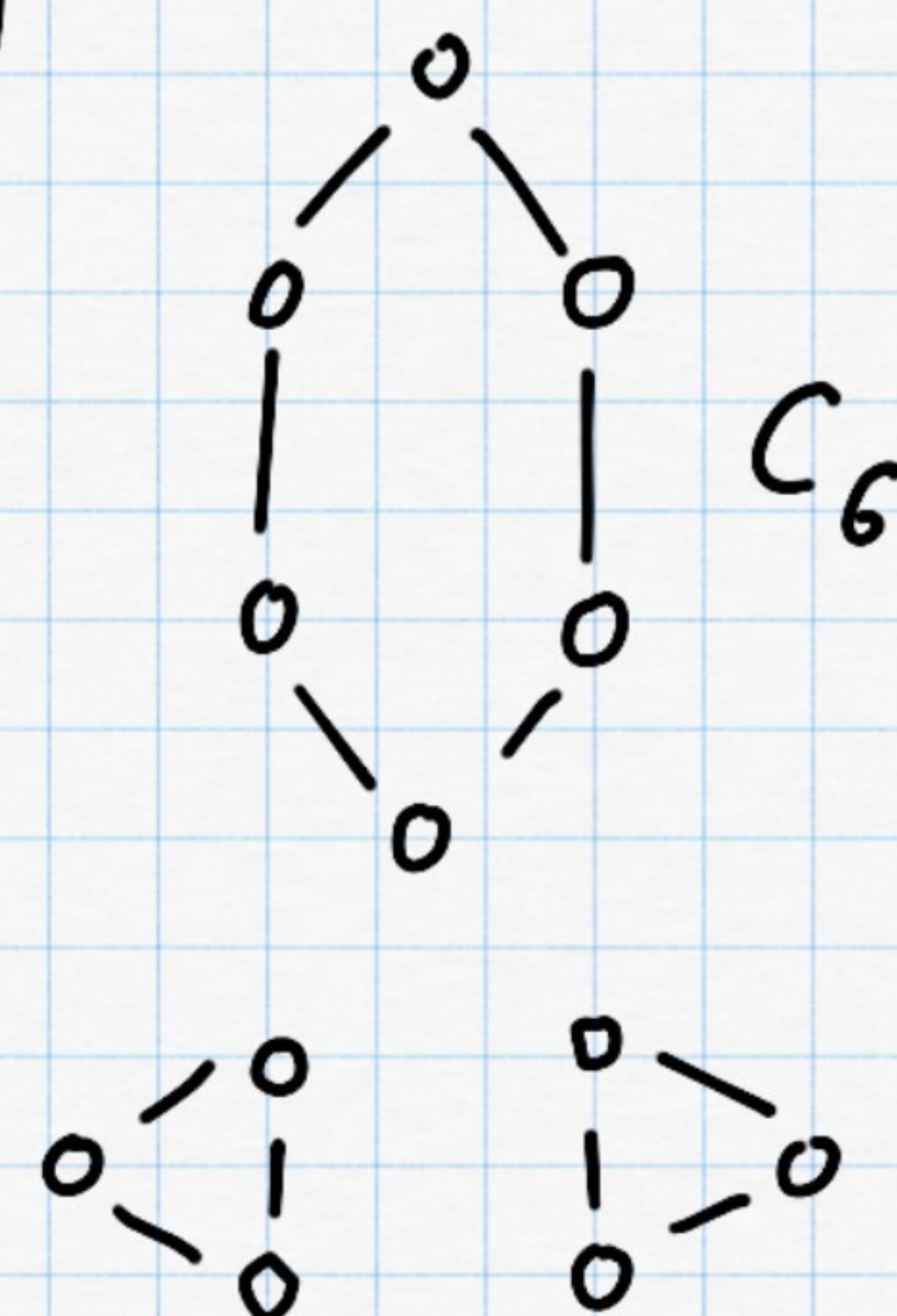
b)

$\circ$	id	$(3,4)$	$(6,8)(1,7)$	$(1,7)(6,8)(3,4)$
id	id	$(3,4)$	$(6,8)(1,7)$	$(1,7)(6,8)(3,4)$
$(3,4)$	$(3,4)$	id	$(1,7)(6,8)(3,4)$	$(6,8)(1,7)$
$(6,8)(1,7)$	$(6,8)(1,7)$	$(1,7)(6,8)(3,4)$	id	$(3,4)$
$(1,7)(6,8)(3,4)$	$(1,7)(6,8)(3,4)$	$(6,8)(1,7)$	$(3,4)$	id

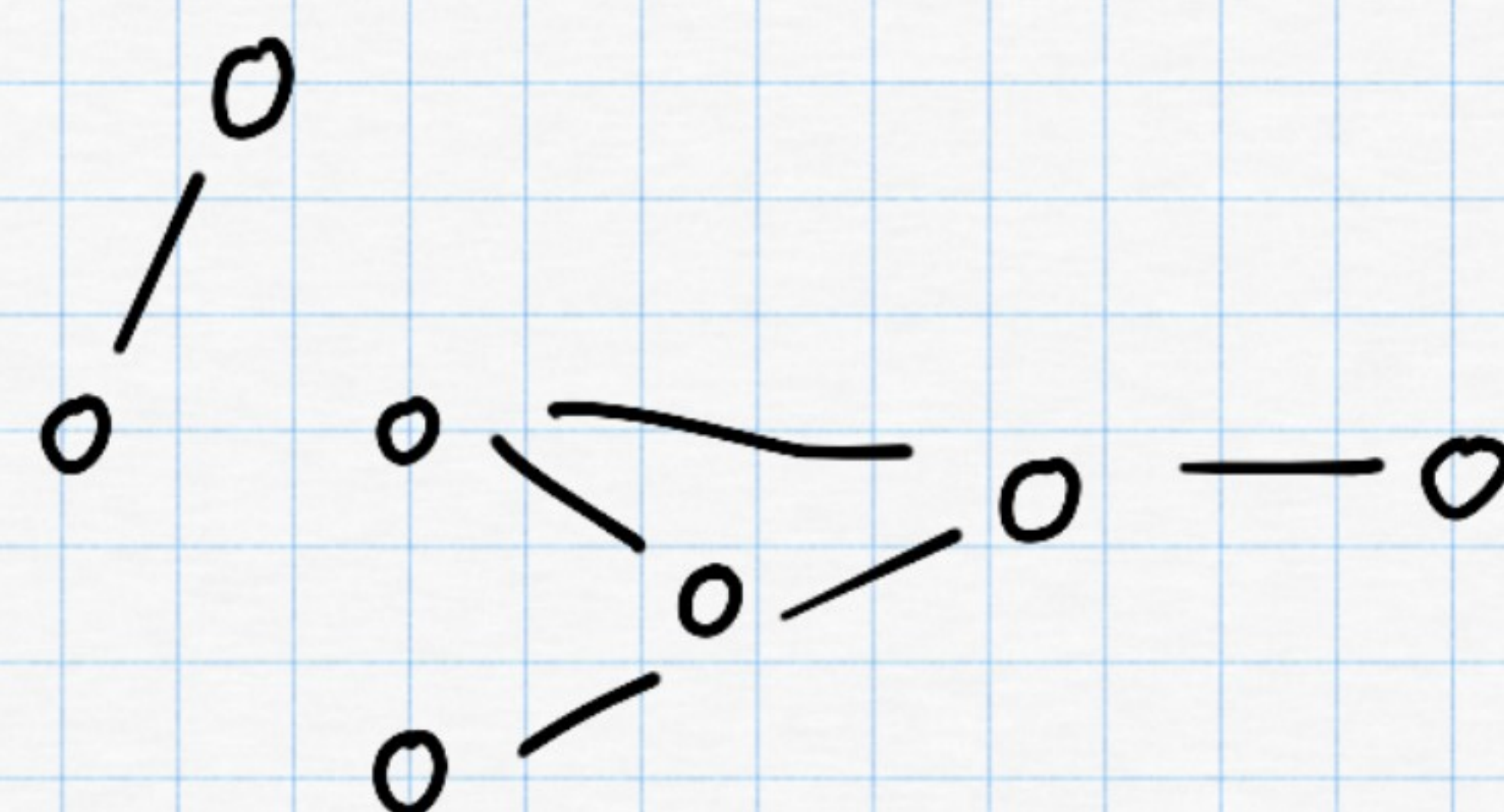
$\Rightarrow$ Die Menge A bildet mit der Funktionskomposition
eine Gruppe (vgl. Mathematikurs)

3)

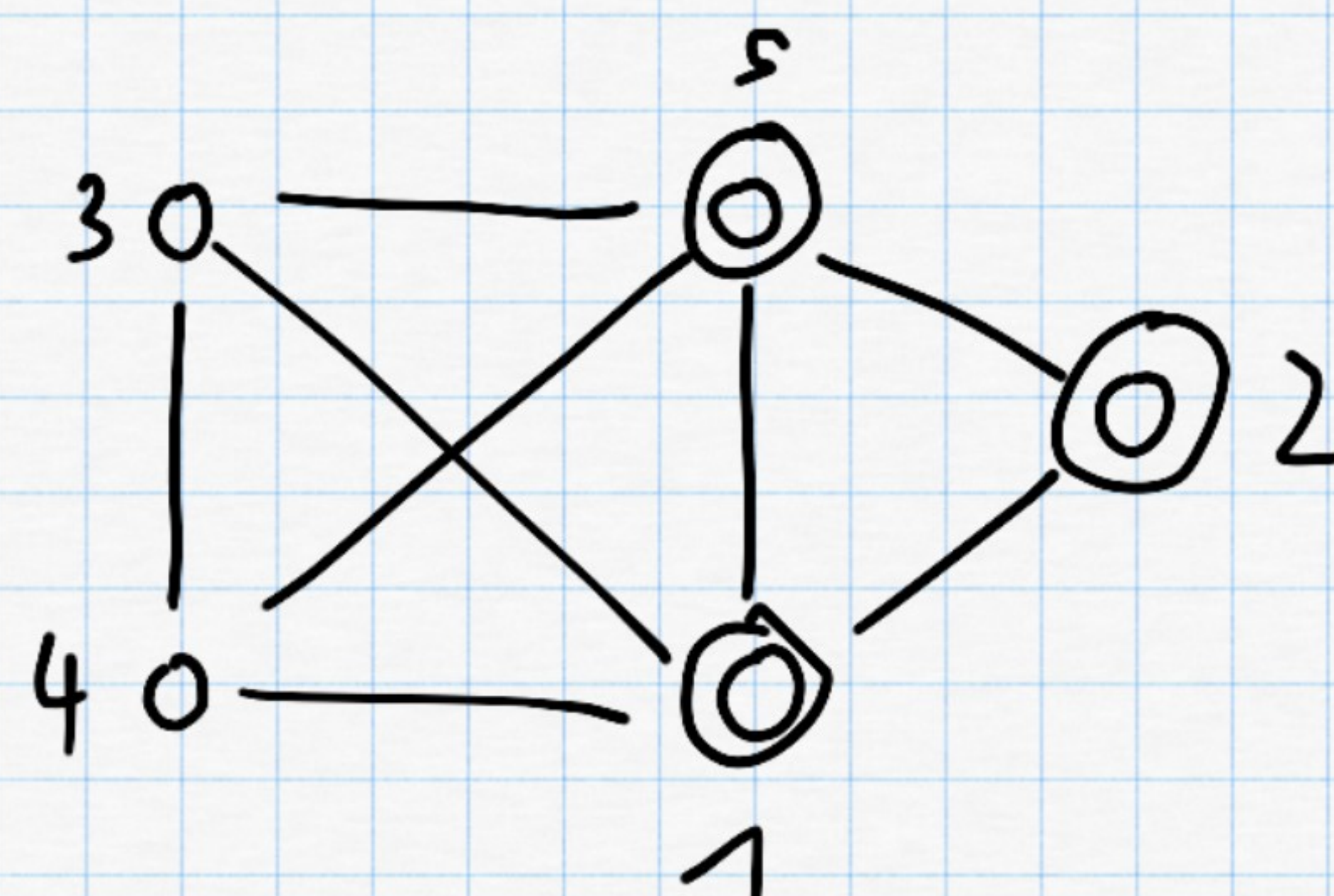
a) $(2, 2, 2, \overset{1}{2}, \overset{1}{2}, 2)$
 $(1, 1, \overset{1}{2}, \overset{1}{2}, 2)$
 $(1, 1, \overset{0}{1}, 1)$
 $(0, \overset{0}{1}, 1)$
 $(0, 0)$



D_2 $(1, 1, 1, \overset{0}{1}, \overset{1}{2}, \overset{2}{3}, 3)$
 $(0, 1, 1, \overset{0}{1}, \overset{0}{1}, 2)$
 $(0, 0, 0, \overset{0}{1}, 1)$
 $(0, 0, 0, 0)$



c) $D_4 = (\overline{2}, \overline{3}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{4})$



d)

