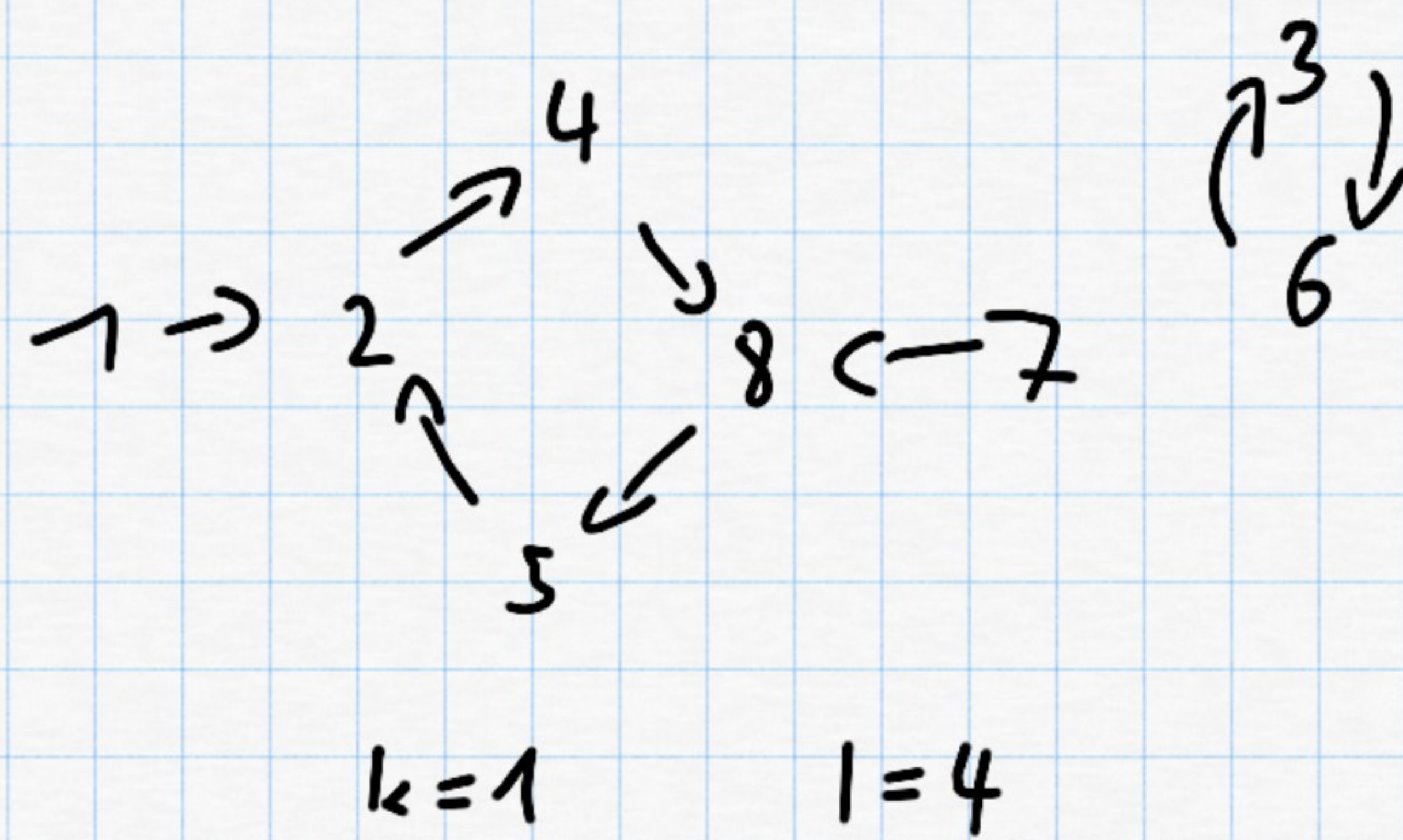
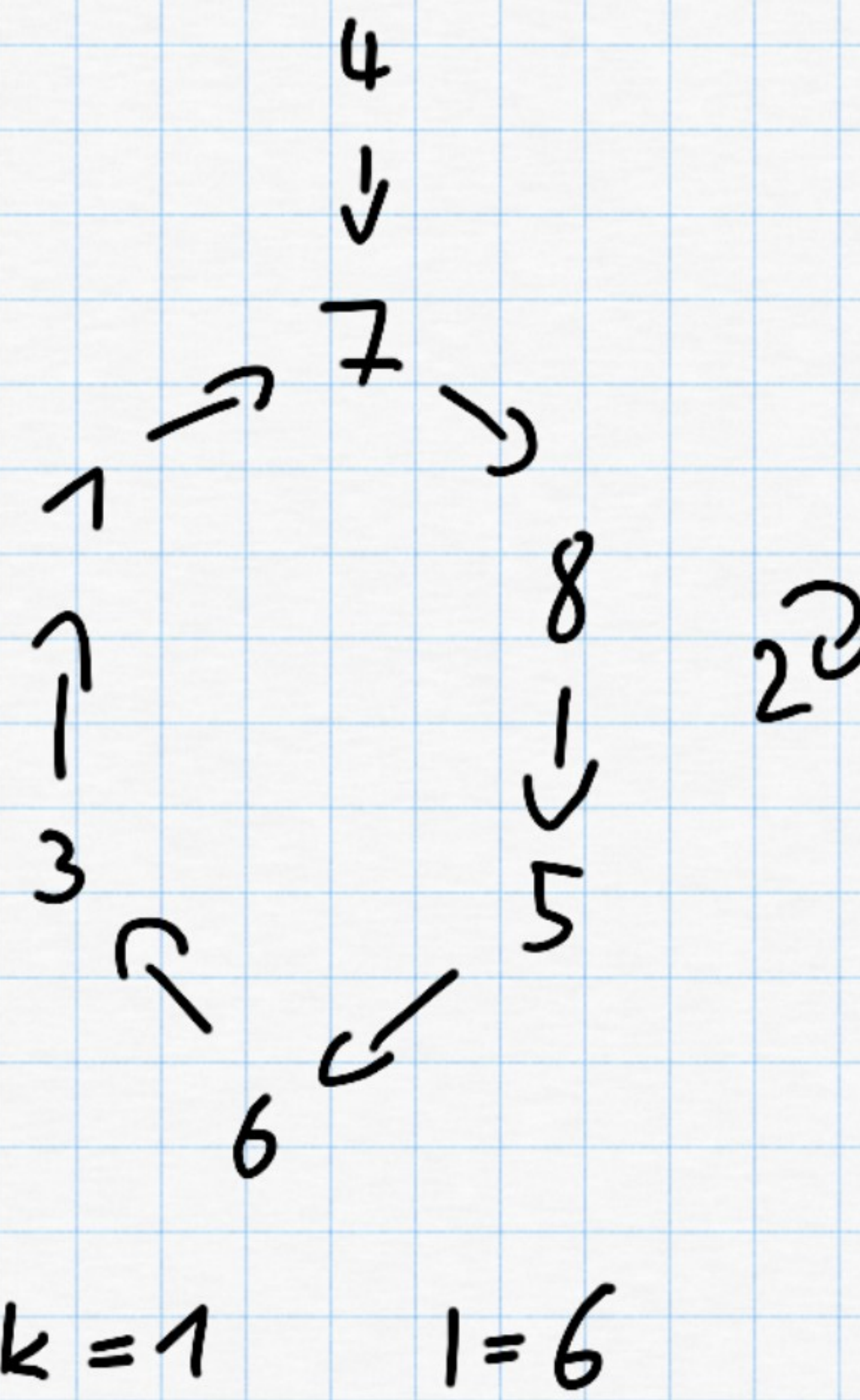


1 a) + b)

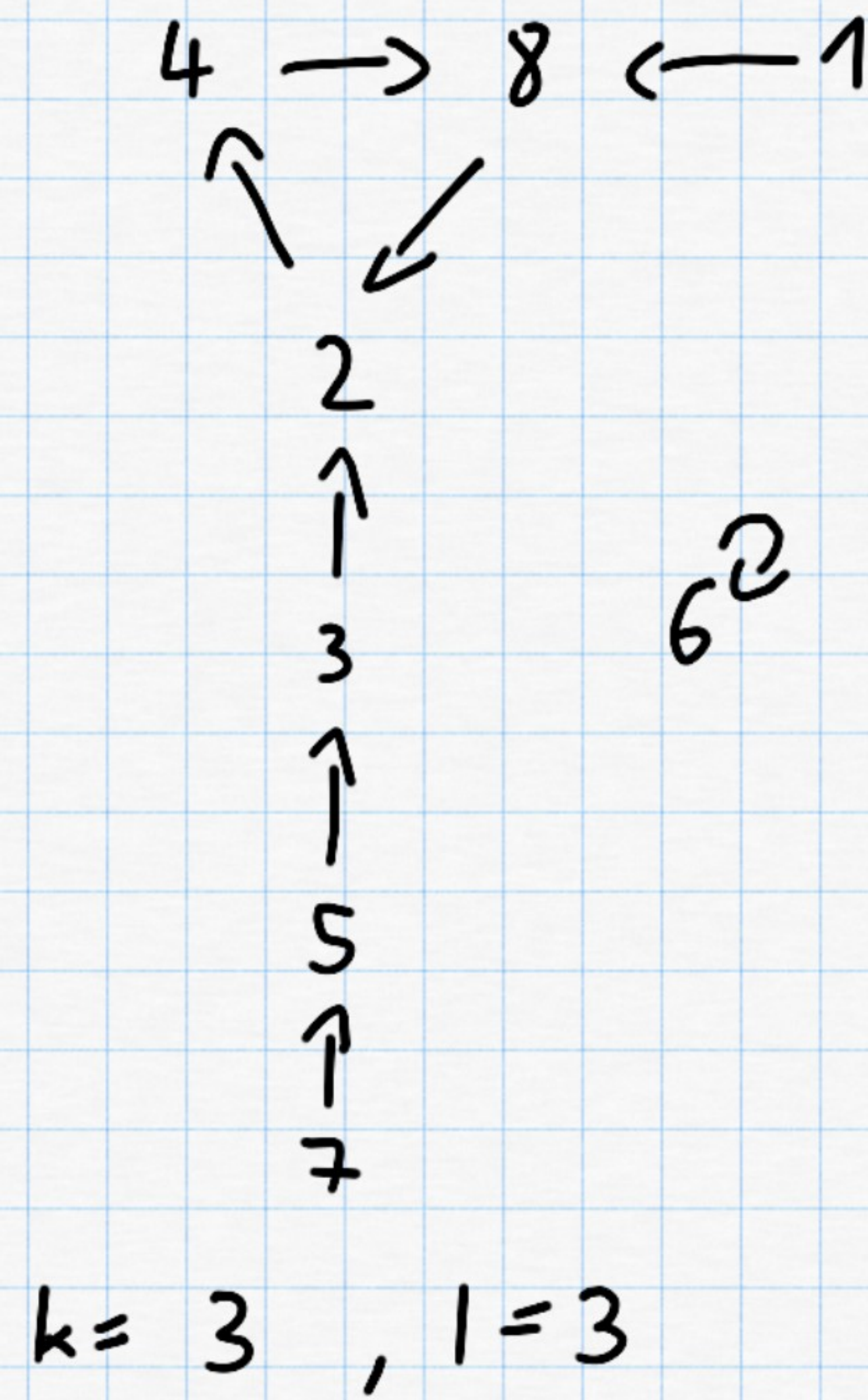
f.



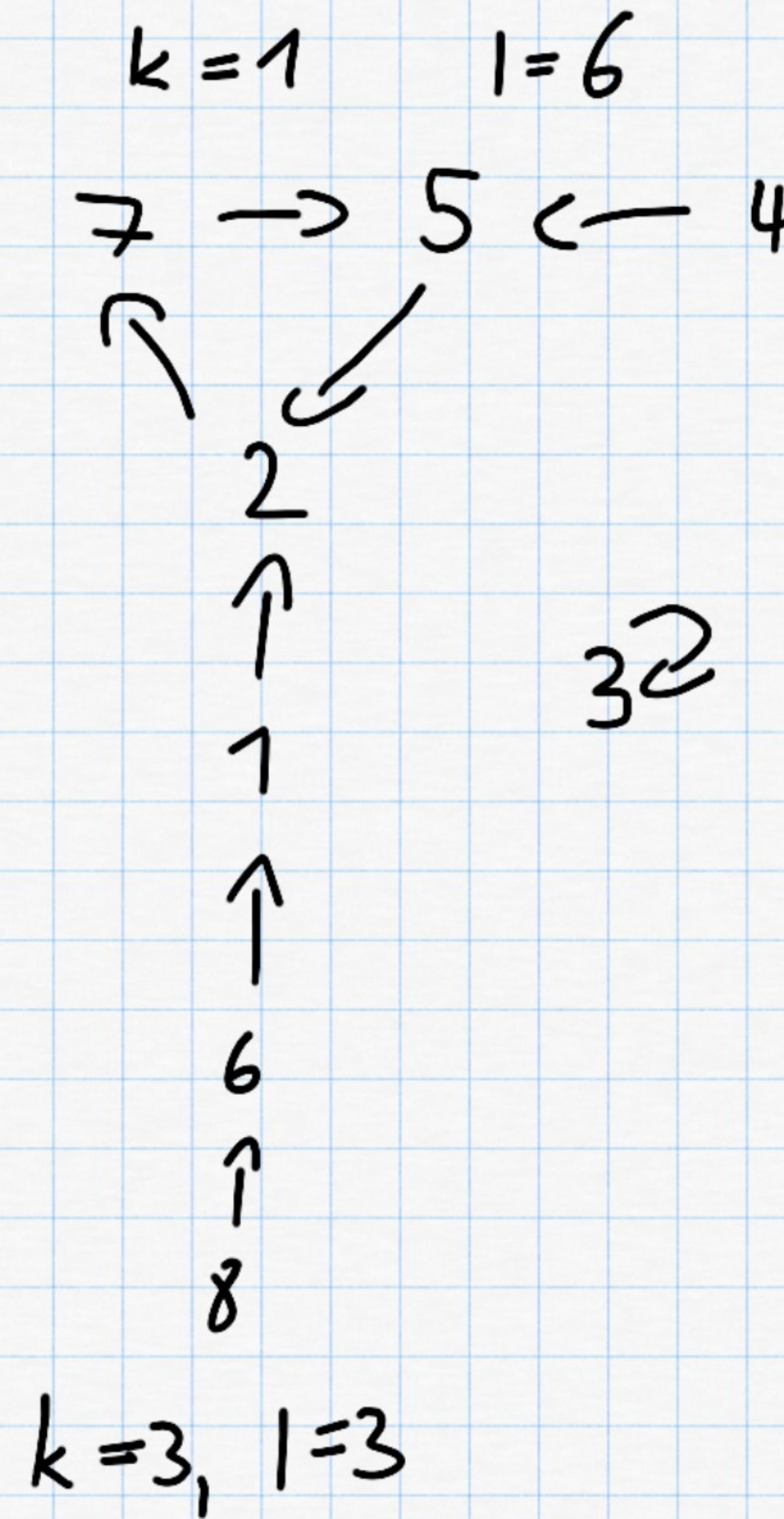
g:



$f \circ g$:



$g \circ f$:



k : max. Eintrittslänge
in Kreis

l : kgV aller Kreislängen

Aufgabe 4.2

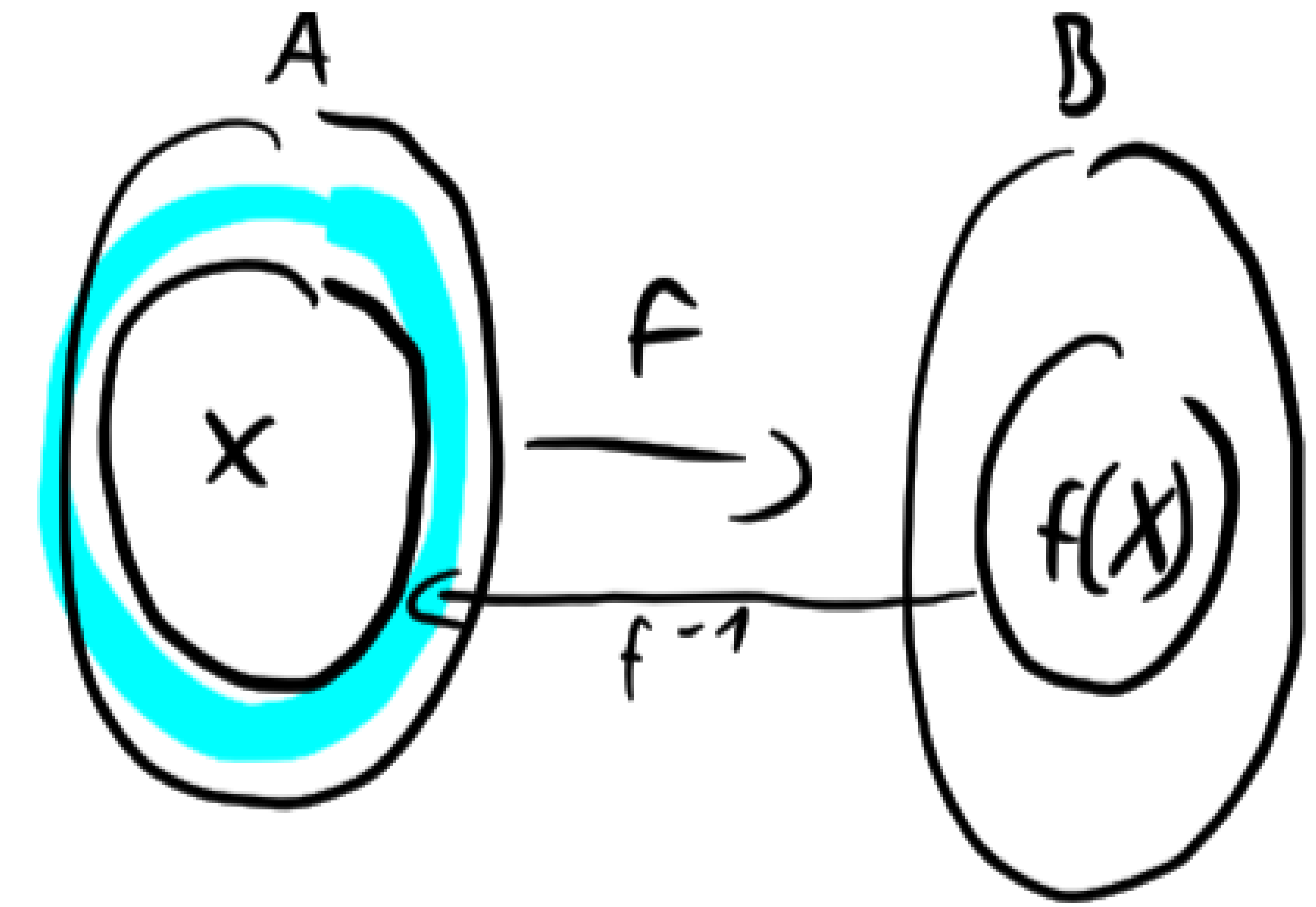
Sei $f: A \rightarrow B$. Für $X \subseteq A$ definiert man üblicherweise $f(X) := \{f(x) \mid x \in X\}$.

(a) Zeigen Sie: $X \subseteq f^{-1}(f(X))$ für jede Teilmenge $X \subseteq A$.

(b) Geben Sie eine konkrete Funktion f an, so dass in (a) X eine echte Teilmenge ($\subsetneq$) von $f^{-1}(f(X))$ ist.

(c) Zeigen Sie: $f(X \setminus Y) \supseteq f(X) \setminus f(Y)$ für alle Teilmengen $X, Y \subseteq A$.

(d) Zeigen Sie: f ist injektiv gdw. in (c) Gleichheit für alle X, Y gilt.



$$\begin{aligned} \text{a)} \quad f^{-1}(f(X)) &= \{a \in A \mid f(a) \in f(X)\} = \{a \in A \mid f(a) \in \{f(x') \mid x' \in X\}\} \\ x \in X \subseteq A \quad & f(x) \in \{f(x') \mid x' \in X\} \quad x \in f^{-1}(f(X)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) z.B. } X &= \{1\} \\ 1 &\mapsto 1 \\ 2 &\mapsto 1 \end{aligned}$$

$$f^{-1}(f(X)) = \{1, 2\}$$

$$f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, \quad x \mapsto x^2 \quad \text{für } X = \mathbb{N}$$

$$3) a) |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| = |2^{\mathbb{N}}|$$

$$|2^{\mathbb{N}}| \leq |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}|:$$

$$f: \boxed{\mathbb{N}} \rightarrow \boxed{\{1, 2\}}$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 ist nicht
 enthalten enthalten

$$\Rightarrow |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| = |2^{\mathbb{N}}|$$

$$|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| \subseteq 2^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$$

$$|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| \leq |2^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}|$$

$$\downarrow$$

$$|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| \leq |2^{\mathbb{N}}|$$

$$|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| \leq |2^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}| \quad \rightarrow \quad |2^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}| \leq |2^{\mathbb{N}}|$$

$\uparrow$
Menge aller Relationen auf der
Grundmenge $\mathbb{N}$

$$|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$$

$$\Rightarrow |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| \leq |2^{\mathbb{N}}|$$

4b)

IA. $\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Beweis:

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^n k^2} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \dots$$

$$\frac{2n^3 + 2n^2 + n^2 + n}{6} + \frac{6(n+1)^2}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

$$2n^3 + 9n^2 + 13n + 6 = (n+1)(n+2)(2n+3)$$

$$2n^3 + 9n^2 + 13n + 6 = (n^2 + 3n + 2)(2n+3)$$

$$2n^3 + 9n^2 + 13n + 6 = 2n^3 + 9n^2 + 13n + 6 \quad \square$$

4c)

IA.

$$\frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \sum_{k=0}^n x^k$$

Beweis:

$$\sum_{k=0}^{n+1} x^k = \frac{1-x^{(n+1)+1}}{1-x}$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^n x^k} + x^{n+1} = \frac{1-x^{n+2}}{1-x}$$

$$\frac{1-x^{n+1}}{1-x} + x^{n+1} = \frac{1-x^{n+2}}{1-x}$$

$$\frac{1-x^{n+1}}{1-x} + \frac{x^{n+1}-x^{n+2}}{1-x} = \frac{1-x^{n+2}}{1-x}$$

$$\frac{1-x^{n+2}}{1-x} = \frac{1-x^{n+2}}{1-x} \quad \square$$