

a) Gewinn 5: 5 3-mal, 5 4-mal, 5 5-mal, 5 6-mal

$$3: \binom{6}{3} \cdot 1^3 \cdot 4^3$$

$$4: \binom{6}{4} \cdot 1^4 \cdot 4^2$$

$$5: \binom{6}{5} \cdot 1^5 \cdot 4$$

$$6: 1$$

$$\Rightarrow \sum_{k=3}^6 \binom{6}{k} \cdot 4^{6-k} = 1545$$

$$b) \Delta = \left\{ \begin{array}{l} (4, 1, 0, 0, 0, 0) \rightarrow \frac{6!}{(1!)^4 \cdot 4! \cdot (2!)^2 \cdot 2!} \cdot 5^{\frac{5}{2}} \\ (2, 2, 0, 0, 0, 0) \rightarrow \frac{6!}{(1!)^2 \cdot 2! \cdot (2!)^2 \cdot 2!} \cdot 5^{\frac{4}{2}} \\ (0, 3, 0, 0, 0, 0) \rightarrow \frac{6!}{(2!)^3 \cdot 3!} \cdot 5^{\frac{3}{2}} \end{array} \right\} \sum_{\lambda \in \Delta} \frac{6!}{\prod_{i=1}^6 (i!)^{\lambda_i} \cdot \lambda_i!} \cdot 5^{\frac{\sum_{i=1}^6 \lambda_i}{2}} = 8100$$

$$5^6 - 5 \cdot 1545 + \binom{5}{2} \cdot \binom{6}{3}$$

$$5^6 - \left(5 \cdot 1545 - \binom{5}{2} \cdot \binom{6}{3} \right) = 8100$$

11.2) $n = 19$ Gruppengröße: 3, 4 oder 5

$$a) \Delta = \{ (0, 0, 0, 1, 3, 0, \dots, 0), \\ (0, 0, 3, 0, 2, 0, \dots, 0), \\ (0, 0, 1, 4, 0, \dots, 0), \\ (0, 0, 5, 1, 0, \dots, 0), \\ (0, 0, 2, 2, 1, 0, \dots, 0) \}$$

$$|\Delta| = 5$$

$$b) \sum_{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \Delta} \frac{n!}{\prod_{i=1}^n \lambda_i! \cdot (i!)^{\lambda_i}} \cdot \boxed{\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \right)!}$$

$$\begin{array}{ccccccc} 5 & \cdot & 4 & \cdot & 3 & \cdot & 2 & \cdot & 1 \\ \{1, \dots, 3\}, & \{4, \dots, 6\}, & \{7, \dots, 10\}, & \{11, \dots, 14\}, & \{15, \dots, 19\} \end{array}$$

$$c) \sum_{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \Delta} \frac{n!}{\prod_{i=1}^n \lambda_i! \cdot (i!)^{\lambda_i}} \cdot \prod_{i=1}^n \left(\frac{i!}{i} \right)^{\lambda_i} = \sum_{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \Delta} \frac{n! \cdot \prod_{i=1}^n (i!)^{\lambda_i}}{\prod_{i=1}^n \lambda_i! \cdot \cancel{(i!)^{\lambda_i}} \cdot i^{\lambda_i}} = \frac{n!}{\prod_{i=1}^n \lambda_i \cdot i^{\lambda_i}}$$

Aufgabe 11.4

Wie viele Möglichkeiten gibt es, 42 Meerschweinchen 23 Meerschweinchenzüchtern zuzuordnen, wenn

- (a) sowohl Meerschweinchen als auch Meerschweinchenzüchter jeweils nicht unterschieden werden, und jedem Meerschweinchenzüchter mindestens ein Meerschweinchen zugeordnet werden soll?
- (b) nur Meerschweinchen unterschieden werden, Meerschweinchenzüchter jedoch nicht?
- (c) nur Meerschweinchenzüchter unterschieden werden, Meerschweinchen jedoch nicht?
- (d) sowohl Meerschweinchen als auch Meerschweinchenzüchter jeweils unterschieden werden?
- (e) sowohl Meerschweinchen als auch Meerschweinchenzüchter jeweils unterschieden werden, und jedem Meerschweinchenzüchter mindestens ein Meerschweinchen zugeordnet werden soll?
- (f) sowohl Meerschweinchen als auch Meerschweinchenzüchter jeweils nicht unterschieden werden?

Es reicht die Lösungen als arithmetische Ausdrücke unter Verwendung der in der Vorlesung behandelten Zählkoeffizienten anzugeben. Der Zahlenwert muss nicht angegeben werden. Die arithmetischen Ausdrücke müssen jedoch soweit wie möglich unter Verwendung der bekannten Identitäten für die Zählkoeffizienten vereinfacht werden.

$$a) P_{42, 23}$$

$$b) \sum_{k=1}^{23} S_{42, k}$$

$$c) \binom{42 + 23 - 1}{42}$$

$$d) {}_{23}^{42}$$

$$e) 23! S_{42, 23}$$

$$f) \sum_{k=1}^{23} P_{42, k} = H_{42, 23} = P_{42 + 23, 23} = P_{65, 23}$$

Aufgabe 11.5

Bestimmen Sie mit Hilfe des Prinzips von Inklusion und Exklusion die Anzahl der Zahlen ≤ 1000 , die weder durch 3 noch durch 5 noch durch 7 teilbar sind.

$$|A_3| = 333$$

$$|A_{3,5}| = 66$$

$$|A_5| = 200$$

$$|A_{3,7}| = 47$$

$$|A_7| = 142$$

$$|A_{5,7}| = 28$$

$$|A_{3,5,7}| = 9$$

$$1000 - 333 - 200 - 142 + 66 + 47 + 28 - 9 = 457$$

