

Aufgabe 10.1

- (a) Bestimmen Sie $|\{(s_1, \dots, s_5) \in [6]^5\}|$.
- (b) Bestimmen Sie $|\{(s_1, \dots, s_{13}) \in \mathbb{N}^{13} \mid s_1 + \dots + s_{13} = 17\}|$
- (c) Bestimmen Sie $|\{(|f^{-1}(1)|, \dots, |f^{-1}(13)|) \mid f: [17] \rightarrow [13]\}|$
- (d) Wie viele Möglichkeiten gibt es, um aus einer Urne mit 22 unterschiedlichen Bällen 13 Bälle ohne Zurücklegen und unter Beachtung der Reichenfolge zu wählen?
- (e) Bestimmen Sie den Koeffizienten des Monoms $x^{36}y^{12}z^{32}$ in dem Polynom $(16 \cdot x + 19 \cdot y + 6 \cdot z)^{80}$.
- (f) Wie viele Möglichkeiten gibt es, um aus einer Urne mit 22 unterschiedlichen Bällen 6 Bälle ohne Zurücklegen und ohne Beachtung der Reichenfolge zu wählen?

Es wird stets eine kurze Begründung, das Ergebnis als arithmetischer Term unter Verwendung der in der Vorlesung behandelten kombinatorischen Koeffizienten und der konkrete numerische Wert erwartet.

Hinweis: Sind $x_1, \dots, x_k$ Variablenbezeichner und $d_1, \dots, d_k \in \mathbb{N}_0$ natürliche Zahlen, dann ist $x_1^{d_1} \dots x_k^{d_k}$ ein Monom vom Gesamtgrad $d_1 + \dots + d_k$; die Exponenten d_i geben gerade an, wie häufig die Variable x_i in dem Monom vorkommt.

e)

$$\binom{80}{36} \binom{44}{12} \cdot 19^{12} \cdot 16^{36} \cdot 6^{32}$$

$$(a+b)(a+b) = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

a) 6^5 $6^{\underline{5}}$

b) $\binom{n+k-1}{k}$ $\binom{4+13-1}{4}$

$$\binom{n-1}{k-1} = \binom{16}{12}$$

c) $\binom{17+13-1}{17}$

$$2a) \quad c_{87,9,2} = \overbrace{\binom{98}{87} \binom{11}{9}} \cdot 2^{82} \cdot 3^9 \cdot 5^2 \cdot \binom{100}{2} \\ \underbrace{\binom{100}{87} \cdot \binom{13}{9} \cdot \binom{4}{2}} \cdot 2^{87} \cdot 3^9 \cdot 5^2$$

$$b) \quad |j+k| > 100 \Rightarrow c_{j,k,1} = 0$$

$$\Rightarrow |\{(j,k,1) \in N_0^3 \mid |j+k| \leq 100\}| \quad i = 100 - (j+k,1) \\ = |\{(j,k,1) \in N_0^4 \mid i+j+k+1 = \underline{100}\}| = \\ \underline{\binom{100+4-1}{100}} = \binom{103}{100}$$

$$c) \quad |\{(j,k,1) \in N_0^3 \mid |j+k| = 15\}| = \\ \binom{15+3-1}{15} = \binom{17}{15} \\ \downarrow \downarrow \downarrow \\ \binom{j}{j}, \binom{k}{k}, \binom{1}{1} \\ ||| ||| |$$

$$3) \quad N(\pi) := |\{i \in [n] \mid \pi(i) = i\}|$$

	$M_{i,1}$	$M_{i,2}$	$M_{i,3}$
π_1	1	1	1
π_2	1	0	0
π_3	0	1	0
π_4	0	0	1

$$\Rightarrow N(\pi_1) = 3$$

$$\Rightarrow N(\pi_2) = 1$$

$$\Rightarrow N(\pi_3) = 1$$

$$\Rightarrow N(\pi_4) = 1$$

$$\pi_5 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow N(\pi_5) = 0$$

$$\pi_6 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow N(\pi_6) = 0$$

$$N(\pi_i) = \sum_{j=1}^n M_{i,j}$$

$$\frac{1}{|\pi|} \sum_{i=1}^{n!} N(\pi_i) = \frac{1}{n!} \cdot \sum_{i=1}^{n!} \sum_{j=1}^n M_{i,j} = \frac{1}{n!} \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^{n!} M_{i,j} \right)$$

$$n \cdot (n-1)! \cdot (n-2)! \dots = n!$$

$$\pi: i \rightarrow i \rightarrow (n-1)! \text{ Permutationen, wenn } \pi(i) = i \text{ fixiert ist}$$

$$(n-1)! + (n-1)! + \dots + (n-1)!$$

$$\rightarrow \frac{1}{n!} \cdot \sum_{j=1}^n (n-1)! = \frac{1}{n!} \cdot n \cdot (n-1)! = \frac{1}{n!} \cdot n! = 1$$

$\Rightarrow$ Im Schnitt nimmt eine Person ihr Geschenk mit

4) $M =$ Menge der Geschenkpriese $\Rightarrow |M| = 16$

$$S \subseteq M, S \neq \emptyset$$

$$\Rightarrow 1 \leq \sum_{s \in S} s \leq \sum_{s \in M} s \leq |M| \cdot \max_{s \in M} s \leq 16 \cdot 4000 = \underline{64000}$$

$$|\{S \mid S \subseteq M, S \neq \emptyset\}| = 2^{|M|} - 1 = 2^{16} - 1 = \underline{65535}$$

$$f: 2^M \rightarrow [64000] \rightarrow \text{keine injektive Funktion}$$

$$\Rightarrow S_1, S_2 \in 2^M \setminus \{\emptyset\} \text{ mit } S_1 \neq S_2$$

$$\text{und } \sum_{s \in S_1} s = \sum_{s \in S_2} s$$

$$\Rightarrow S_1 \not\subset S_2 \rightarrow S_2 \not\subset S_1$$

$$\Rightarrow S_1' = S_1 \setminus S_2 \quad S_2' = S_2 \setminus S_1$$

$$\Rightarrow \sum_{s \in S_1'} s = \sum_{s \in S_2'} s$$

S_1', S_2' disjunkt