

$$8.1 \quad a) \quad (\underline{A} \wedge \underline{B}) \vee \underline{A} \equiv \text{Id}$$

$$(\underline{A} \wedge \underline{B}) \vee (\underline{A} \wedge \underline{\text{true}}) \equiv \text{Distr}$$

$$\underline{A} \wedge (\underline{B} \vee \underline{\text{true}}) \equiv \text{Dom.}$$

$$\underline{A} \wedge \underline{\text{true}} \equiv \text{Id}$$

$\underline{A}$

$$b) \quad (\underline{A} \vee \underline{B}) \wedge \underline{A} \equiv \text{Distr.}$$

$$(\underline{A} \wedge \underline{A}) \vee (\underline{B} \wedge \underline{A}) \equiv \text{Idempotenz}$$

$$\underline{A} \vee (\underline{B} \wedge \underline{A})$$

$$c) \quad ((\underline{A} \vee (\underline{B} \vee \underline{C})) \wedge (\underline{C} \vee \neg \underline{A})) \equiv \text{Distr}$$

$$(\underline{A} \wedge (\underline{C} \vee \neg \underline{A})) \vee ((\underline{B} \vee \underline{C}) \wedge (\underline{C} \vee \neg \underline{A})) \equiv \text{Distr.}$$

$$((\underline{A} \wedge \underline{C}) \vee (\underline{A} \wedge \neg \underline{A})) \vee \quad \equiv \text{triv. Kontr.}$$

$$((\underline{A} \wedge \underline{C}) \vee \underline{\text{false}}) \vee \quad \equiv \text{Id}$$

$$(\underline{A} \wedge \underline{C}) \vee ((\underline{B} \vee \underline{C}) \wedge (\underline{C} \vee \neg \underline{A})) \equiv \text{Distr.}$$

$$(\underline{A} \wedge \underline{C}) \vee ((\underline{B} \wedge (\underline{C} \vee \neg \underline{A})) \vee (\underline{C} \wedge (\underline{C} \vee \neg \underline{A}))) \equiv \text{Distr}$$

$$\equiv \vee ((\underline{B} \wedge \underline{C}) \vee (\underline{B} \wedge \neg \underline{A})) \vee (\underline{C} \wedge (\underline{C} \vee \neg \underline{A})) \equiv \text{Abs.}$$

$$(\underline{A} \wedge \underline{C}) \vee (((\underline{B} \wedge \underline{C}) \vee (\underline{B} \wedge \neg \underline{A})) \vee \underline{C}) \equiv \text{Komm \& Ass.}$$

$$(\underline{A} \wedge \underline{C}) \vee ((\underline{B} \wedge \neg \underline{A}) \vee ((\underline{B} \wedge \underline{C}) \vee \underline{C})) \equiv \text{Abs.}$$

$$(\underline{A} \wedge \underline{C}) \vee ((\underline{B} \wedge \neg \underline{A}) \vee \underline{C}) \equiv \text{Komm. \& Ass}$$

$$((\underline{A} \wedge \underline{C}) \vee \underline{C}) \vee (\underline{B} \wedge \neg \underline{A}) \equiv \text{Abs.}$$

$$\underline{C} \vee (\underline{B} \wedge \neg \underline{A}) \equiv \text{Komm}$$

$$(\underline{B} \wedge \neg \underline{A}) \vee \underline{C}$$

$$2a) \quad \varphi_2 = (D_S \rightarrow \neg D_H) \wedge (M_S \rightarrow \neg M_H)$$

$$\varphi_3 = (M_R \wedge M_H) \vee (D_R \wedge D_H) \vee D_R$$

$$\varphi_4 = ((D_L \wedge D_S) \rightarrow (D_R \vee D_H)) \wedge ((M_L \wedge M_S) \rightarrow (M_R \vee M_H))$$

$$b) \quad \varphi_b = (D_L \vee M_L) \wedge (D_S \vee M_S) \wedge (D_H \vee M_H) \wedge (D_R \vee M_R)$$

$$c) \quad \varphi_c = \neg(D_L \wedge M_L) \wedge \neg(D_S \wedge M_S) \wedge \neg(D_H \wedge M_H) \wedge \neg(D_R \wedge M_R)$$

X := Personen

T := Tage $\bigwedge_{x \in X} \bigwedge_{(T_1, T_2) \in T^2} \neg(T_1 \wedge T_2)$

$$1) \quad D_S = 1, \quad M_H = 1, \quad D_R = 1, \quad M_L = 1,$$

$$\text{Rest} = 0$$

$$\text{oder. } D_S = 1, \quad M_H = 1, \quad M_R = 1, \quad M_L = 1,$$

$$\text{Rest} = 0$$

Aufgabe 8.4

- (a) Zeigen Sie: Zu jeder aussagenlogischen Formel F gibt es eine semantisch äquivalente Formel G , welche nur die Operatoren $\rightarrow$ und $false$ verwendet.

Hinweis: Nach Vorlesung gibt es zu F stets eine semantisch äquivalente Formel in DNF bzw. KNF, d.h. eine Formel, welche nur die Operatoren $\{\neg, \wedge, \vee\}$ verwendet.

- (b) Überführen Sie die Formel in den aussagenlogischen Variablen A, B

$$((A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B))$$

in eine semantisch äquivalente Formel, in welcher nur die Operatoren $\rightarrow$ und $false$ verwendet werden.

- (c) Zeigen Sie entsprechend zu (a), dass es zu jeder aussagenlogischen Formel F auch eine semantisch äquivalente Formel G gibt, welche nur die Operatoren $\{true, \wedge, \oplus\}$ verwendet.
- (d) Überführen Sie nun analog zu (b) die Formel F aus (b) in eine semantisch äquivalente Formel, in welcher nur die Operatoren $true, \wedge$ und $\oplus$ verwendet werden.

a)

$$\neg A \equiv (\neg A \vee false) \equiv (A \rightarrow false)$$

$$(A \vee B) \equiv (\neg \neg A \vee B) \equiv (\neg A \rightarrow B) \equiv ((A \rightarrow false) \rightarrow \neg B)$$

$$(A \wedge B) \equiv \neg \neg (A \wedge B) \equiv \neg (\neg A \vee \neg B) \equiv \neg (A \rightarrow \neg B) \equiv \neg (A \rightarrow (B \rightarrow false)) \equiv ((A \rightarrow (B \rightarrow false)) \rightarrow false)$$

c)

$$\neg A \equiv (true \oplus A)$$

$$(A \vee B) \equiv (A \oplus B) \oplus (A \wedge B)$$

$$\equiv \neg (\neg A \wedge \neg B) \equiv (true \oplus ((true \oplus A) \wedge (true \oplus B)))$$