1b)

Baum: $|E| = |V| - 1$

Graph mit $|E| \geq |V| \geq 3$

$\Rightarrow$ enthält einen Kreis

Da G keinen Kreis enthalten darf,

mus $|E| < |V|$ gelten

$|E| = |V| - 1$ einzige Möglichkeit f. zus. Graphen

$\Rightarrow$ Aussage wahr

7.2 a) Sei G zusamm. hängend

Fall 1: G unterteilt Ebene in mindestens $|F| = 2$ Flächen

$\rightarrow$ Im bipartiten Graph werden alle Flächen mit mindestens 4 Kanten begrenzt

Sei E_f die Kanten, die f begrenzen.

Dann gilt $4|F| = \sum_{f \in F} 4 \leq \sum_{f \in F} E_f \leq 2|E|$

$$\Rightarrow \quad |F| - |E| + |V| - 2 = 0$$

$$|E| \leq 2|V| - 4$$

$$|E| = |F| + |V| - 2$$

$$2|E| = 2(|F| + |V| - 2) \geq 4|F|$$

$$2|F| + 2|V| - 4 \geq 4|F|$$

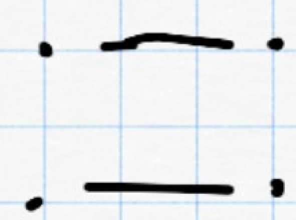
$$2|V| - 4 \geq 2|F| \leq |E| \quad \Rightarrow 2|V| - 4 \geq |E|$$

Fall 2: G die Ebene nicht zerlegt, also $|F| = 1$

$0 = |F| - |E| + |V| - 2 = 1 - |E| + |V| - 2 = -|E| + |V| - 1$

$\Rightarrow |E| = |V| - 1 \leq 2|V| - 4$ für $|V| \geq 3$

$\Rightarrow$ G ist ein Baum



b) $K_{m,n}$: $|V| := m+n := N$, $|E| = mn = (N-n)n$ $\quad m,n \geq 3$

$$|E| \leq 2|V| - 4$$
$$mn \leq 2(m+n) - 4$$
$$(N-n)n \leq 2N - 4$$
$$0 \leq n^2 - nN + 2N - 4$$

$$n \leq \frac{N - \sqrt{N^2 - 4(2N-4)}}{2} \quad \text{oder} \quad n \geq \frac{N + \sqrt{N^2 - 4(2N-4)}}{2}$$

$$n \leq \frac{4}{2} \quad \text{oder} \quad n \geq \frac{2N-4}{2}$$

$$n \leq 2 \quad \text{oder} \quad n \geq N-2$$

$n \geq 3 \Rightarrow n \leq 2$ kann nicht gelten

$n \geq N-2 = m+n-2$

$\Rightarrow 2 \geq m$

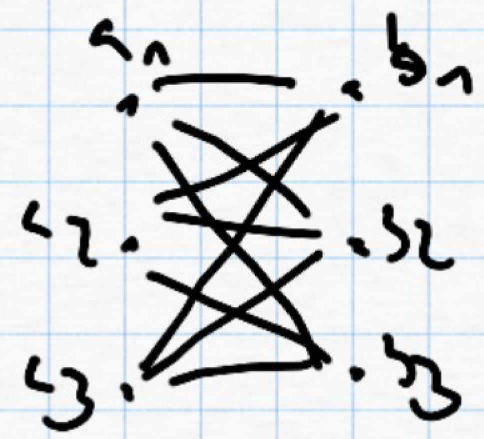
$\Rightarrow$ kann auch nicht gelten

$\Rightarrow |E| \leq 2|V| - 4$ gilt nicht für $K_{m,n}$, $m,n \geq 3 \Rightarrow$ nicht planar

7.3. $K_{m,n}$ für $n=m>1$ ein Hamiltonkreis besitzt

Angenommen es gibt einen Hamilton-Kreis.

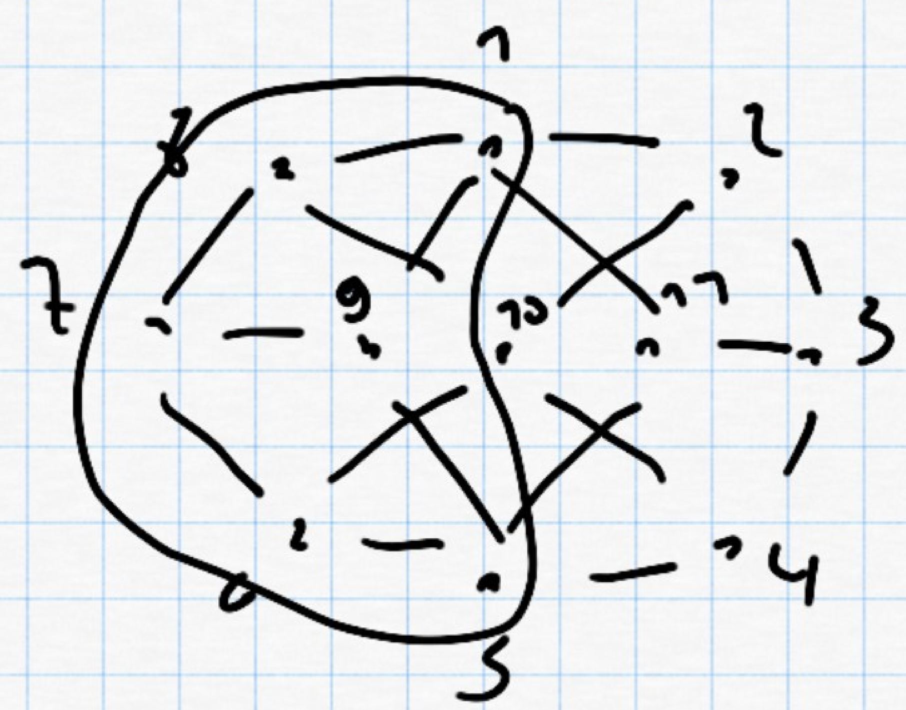
→ Dann muss dieser (weil $K_{m,n}$ bipartit) die Seite mit jeder Kante wechseln.



→ $a_1 b_1 a_2 b_2 \dots a_k b_k a_1$

→ Da daher der Kreis jeden Knoten besucht, bevor a_1 geht muss $k=m=n$ gelten

$n=m>1$ nicht gilt, gibt es keinen Hamilton-Kreis



1	2
5	8
3	9
7	11
10	4
	6

7.5) H ein Matching durch GS berechnet $\precsim_p$ ist Präferenzordnung für Person p

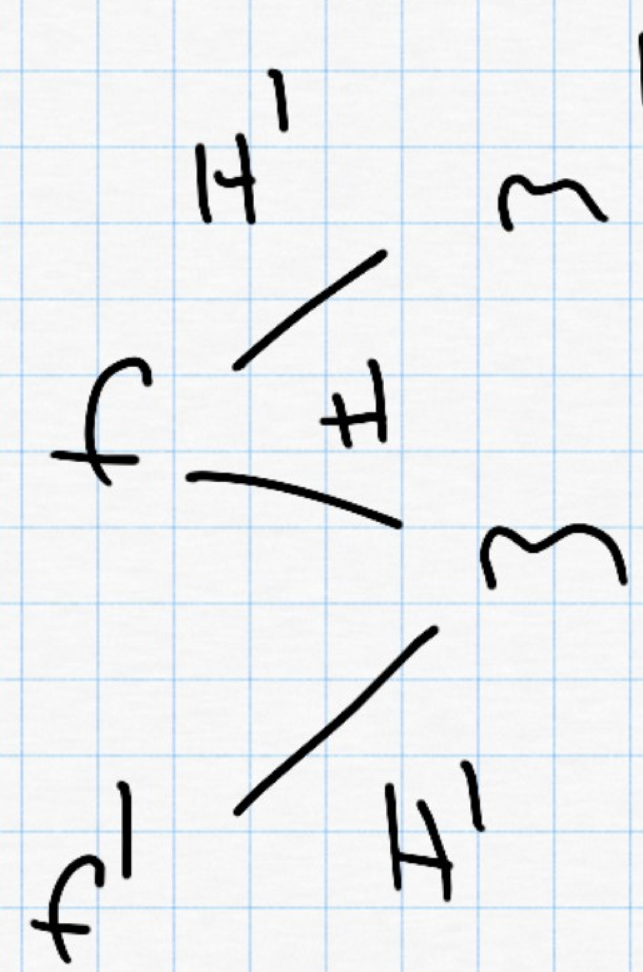
H' ist ein weiteres stabiles Matching $\quad S := \{ f \in F \mid (fH' <_f fH) \} \neq \emptyset$

also es gibt eine Frau, für die H ein besseres Matching darstellt.

Wähle $f \in S$ beliebig und $m := fH$ und $m' := fH'$.

Dann gilt $m' <_f m \Rightarrow m' \neq m$, weil $\precsim_f$ ist total

Sei $f' := H'm$



Da f unter H' m' heiraten würde, muss $f' \neq f$

- $f \succ_m f'$ → H' ein stabiles Matching, das für

  m besser als Matching H ist

  → Widerspruch: Weil H durch GS-Verfahren erzeugt wurde, gibt es kein H', in dem m einen besseren Partner zugeordnet wird, das gleichzeitig stabil ist