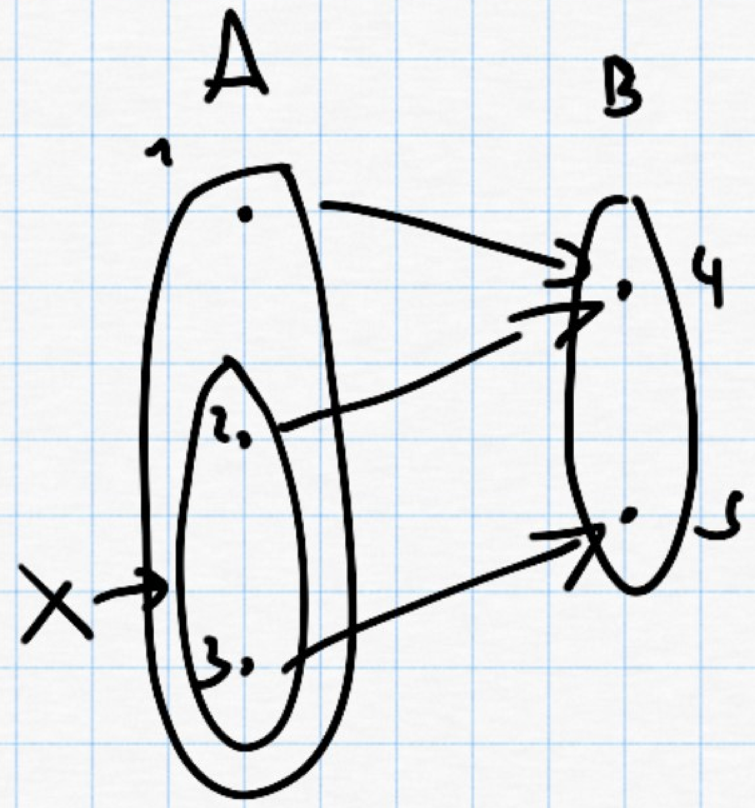
4.1)



$f(X) = \{4,5\}$ $\qquad$ $f^{-1}(f(X)) = \{1,2,3\}$

$X = \{2,3\}$

$X \subseteq f^{-1}(f(X))$

Wenn wir ein $a \in A$ haben, sodass $a \notin X$ ist, aber ein $x \in X$ existiert, sodass $f(a) = f(x)$ gilt dann ist $a \in f^{-1}(f(X))$, aber $a \notin X$. Alle $x \in X$ sind aber in $f^{-1}(f(X))$

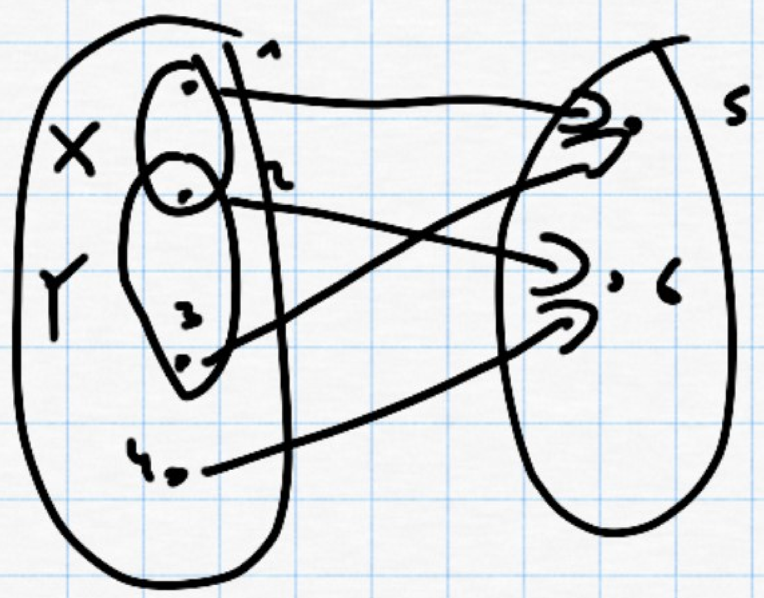
$\Rightarrow X \subseteq f^{-1}(f(X))$

b) $A = \{1,2\}$, $X = \{1\}$, $B = \{3\}$

$f: A \to B$ $\quad x \mapsto 3$

c) $f(X \setminus Y) \supseteq f(X) \setminus f(Y)$

A $\qquad$ B



$f(X \setminus Y) = \{5\}$

$f(X) \setminus f(Y) = \emptyset$

$b \in f(X \setminus Y)$ $\quad$ $b \in f(X)$, $b \notin f(Y)$

Es gibt a, sodass $f(a) = b$. $a \in X$, $a \notin Y$

$b \notin f(Y)$ ist identisch zu $f(a) \notin f(Y)$

$\Rightarrow$ Daraus folgt, dass $a \notin Y$

$\Rightarrow$ Daraus folgt insgesamt: $a \in X \setminus Y$

d) f sei injektiv. Dann soll gelten,

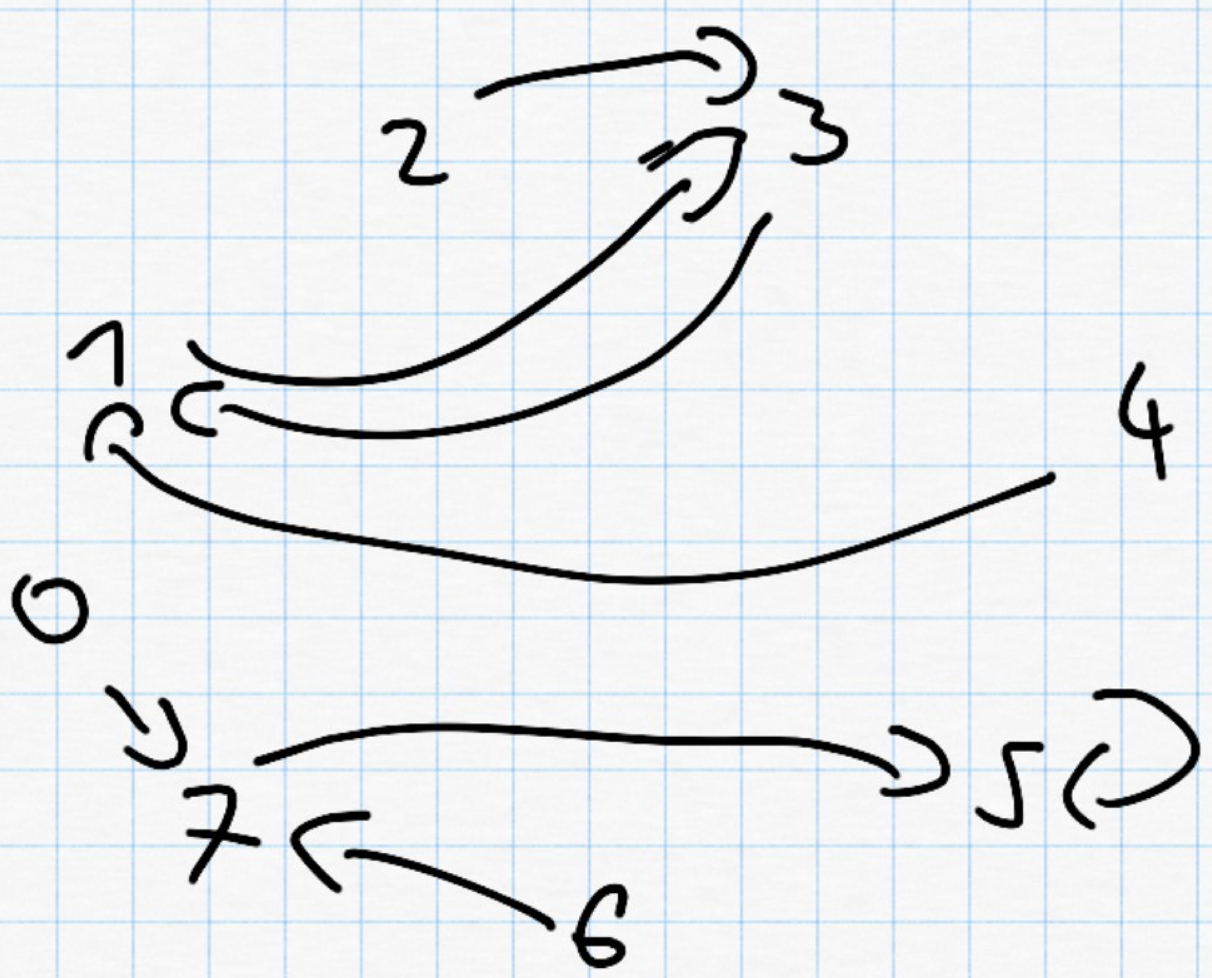
dass $f(X \setminus Y) = f(X) \setminus f(Y)$

Aus c) $f(X) \setminus f(Y) \subseteq f(X \setminus Y)$

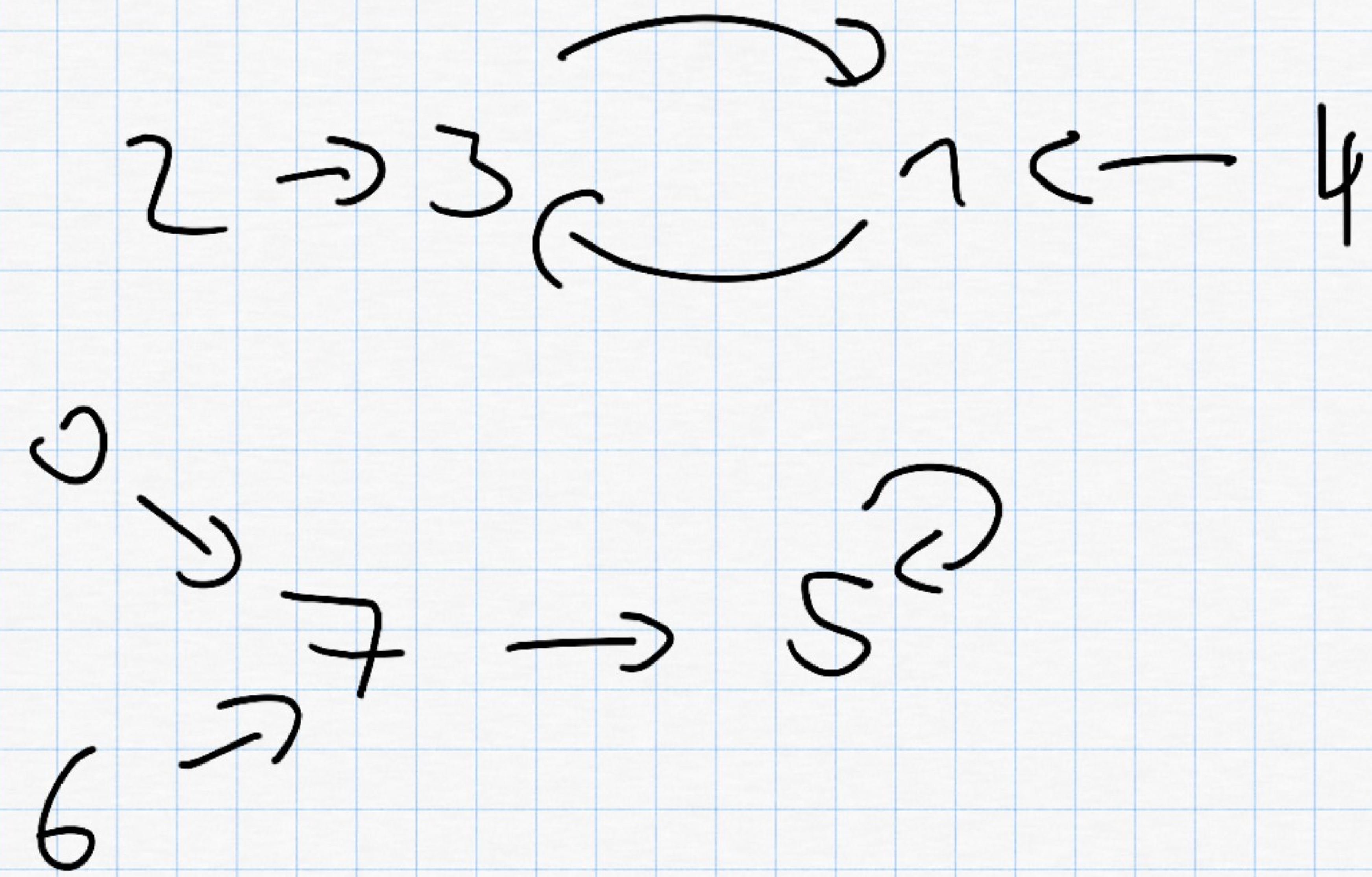
$\Rightarrow f(X \setminus Y) \subseteq f(X) \setminus f(Y)$

2.) $f^0(a) := a$

$f^1(a) := f(f^0(a)) = f(a)$



$=$



$f^1(1) = f^1(2)$ $\qquad$ $f^2(2) = f^1(3)$

$(1,2), (2,3), (1,4), (1,3), (2,4), (3,4)$

$f^1(1) = f^2(4)$

$f^1(1) = f^2(3)$

$f^1(0) = f^1(6)$ $\qquad$ $f^2(0) = f^1(5)$

$(0,6), (0,7), (6,7), (0,5), (5,7), (5,6)$ $\qquad$ $+\{(n,n) \mid n \in [7] \cup \{0\}\}$

c) $a \sim_f b$, genau dann, wenn a, b in einer Zusammenhangskomponente in G_f

d) $f: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 \quad x \mapsto x+1$

e) $f: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0: \quad x \mapsto \begin{cases} x+1, & \text{falls } x \bmod k < k-1 \\ (x-k-1), & \text{falls } x \bmod k = k-1 \end{cases}$

$k = 3$:

$$\begin{tikzcd} & 2 \arrow[dl, bend left] \\ 1 \arrow[ur] & \\ 0 \arrow[u] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & 4 \arrow[dr] & \\ 3 \arrow[ur] & & 5 \arrow[ll] \end{tikzcd}$$

$0 \bmod 0 \neq -1$

$0 \to 1 \to 2 \to 3 \to \ldots$

$0 \bmod 1 = 0$

0? 1?

4.3 $\{0,1\}^\omega := (x_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ mit $x_i \in \{0,1\}$

$\beta : \mathbb{N}_0 \to \{0,1\}^\omega$ nicht surjektiv sein kann

$k \in \mathbb{N}_0 \quad d_k = x_{k,k}$

	0	1	2	3	...	n
$\beta(1)$	$x_{1,0}$	$x_{1,1}$	$x_{1,2}$	$x_{1,3}$	$\vdots$	$x_{1,n}$
$\vdots$				$\vdots$	$\vdots$	
$\beta(n)$	$x_{0,n}$	$x_{1,n}$				

$\beta(k) = (1 - d_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$

An der k-ten Stelle von $\beta(k)$ müsste nach digo Definition $(1-d_k)$ stehen

Das geht aber nicht, weil dort $d_k \neq 1 - d_k$ stehen muss

4.4

Für jedes $i \in \mathbb{N}$ sei A_i eine abzählbare Menge.

$A := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ ist auch eine abzählbare Menge

Wenn $f: \mathbb{N} \to A$, f surjektiv existiert, dann gibt es auch eine Funktion $g: A \to \mathbb{N}$, g injektiv

$q \to \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, die bijektiv ist

$q: n \mapsto (q_1(n), q_2(n))$

Es gibt $f_i: \mathbb{N} \to A_i$, f_i ist injektiv

$e_i \in A_i$ z.B. $a_i = f_i^{-1}(\min(f_i(A_i)))$

$a_i \in A_i$ mit dem kleinsten Bild bezüglich

f_i

$$g_i(k) := \begin{cases} a, & \text{falls } f_i(a) = k \\ a_i & \text{sonst} \end{cases}$$

$g_i(k)$ ist damit eine surjektive Abbildung

von $\mathbb{N} \to A_i$

$h_i : A_i \to \mathbb{N}$, h_i injektiv existiert

$$A := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$$

mit $\mathbb{N} \to A_1 \times \ldots \times A_n$

Seien f, g analog zu f_i, g_i

$\Rightarrow$ Dann gibt es eine injektive Funktion

von $\mathbb{N} \to A$