10.1a)

$(5,0,0,0,0) \Rightarrow 1$ Option

$(3,1,0,0,0) \Rightarrow \binom{5}{3} = \binom{5}{2}$

$(2,0,1,0,0) \Rightarrow \binom{5}{2}$

$(1,2,0,0,0) \Rightarrow \binom{5}{2} \cdot \binom{3}{2} / 2!$

$(1,0,0,1,0) \Rightarrow \binom{5}{1} = 5$

$(0,0,0,0,1) \Rightarrow 1$ Option

$(0,1,1,0,0) \quad \binom{5}{2}$

b) $\sum_{i=1}^{n} i \lambda_i = n$

$(\lambda_1, \dots, \lambda_i, \dots, \lambda_n)$

$\lambda_1: \frac{1}{\lambda_1!} \cdot \binom{n}{1} \binom{n-1}{1} \cdot \binom{n-\lambda_1+1}{1} = \frac{n!}{\lambda_1! \cdot (n-\lambda_1)!}$

$\lambda_2: \frac{1}{\lambda_2!} \cdot \binom{n-\lambda_1}{2} \cdot \binom{n-\lambda_1-2}{2} \cdots \binom{n-\lambda_1-2\cdot\lambda_2+2}{2} = \frac{(n-\lambda_1)!}{\lambda_2!(2!)^{\lambda_2}(n-\lambda_1-2\lambda_2)!}$

$$\frac{n!}{(1!)^{\lambda_1}(2!)^{\lambda_2}\cdots(n!)^{\lambda_n} \cdot \lambda_1!\lambda_2!\dots\lambda_n!}$$

$$\frac{n!}{\cdots\cdots} = \frac{n!}{\cdots\cdot} \cdot 1^{\lambda_1} \cdot 1^{\lambda_2} \cdots 1^{\lambda_n}$$

b) $\Lambda_{n,k} = \{(\lambda_1, \ldots \lambda_n) \in \Lambda_n \mid \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = k\}$

$$\Lambda_n = \biguplus_{k=0}^{n} \Lambda_{n,k}$$

$(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \Lambda_n$ definiert eindeutig eine Zahlenpartition:

$(s_1, \ldots, s_k) \in P_{n,k}$

$$(s_1, \ldots, s_k) = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{\lambda_1}, \underbrace{2, \ldots, 2}_{\lambda_2}, \underbrace{\ldots, n, \ldots, n}_{\lambda_n})$$

λ_i genau die Anzahl von Vorkommnissen i in $|s_1, \dots, s_k|$ ist

$\Lambda_{n,k}$ zu $P_{n,k}$ hat immer eine genaue Zuordnung

Dementsprechend ist $|\Lambda_{n,k}| = |P_{n,k}|$

11,4)

$f: [n] \to [3]$, f ist surjektiv

$3! \cdot S_{n,k}$

$\Omega = [3]^{[n]}$

A_i sei die Anzahl der Abbildungen, welche Person i keine Aufgabe zuordnen

$|\Omega| = 3^n$ $|A_i \cap A_j| = 1 \quad (i \neq j)$

$|A_i| = 2^n$ $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$

$$|\Omega \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3)|$$

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| -$$

$$|A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 2^n + 2^n + 2^n - 3 + 0$$

$$3^n - (3 \cdot 2^n - 3)$$

b) $|\{(s_1, s_2, s_3) \in \mathbb{N}^3 \mid s_1 + s_2 + s_3 = n\})$

$$\Omega = \{(k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{N}_0^3 \mid k_1 + k_2 + k_3 = n\}$$

$$|\Omega| = \binom{n-1}{2}$$

$|A_i| = \binom{n+2-1}{1}$

$|A_i \cap A_j| = 1$

$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$

$|\Omega \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3)| = \binom{n-1}{2} - 3 \cdot \binom{n+1}{1} + 3 = \frac{(n+2)(n+1)}{2} \cdot 3\,(n+1) + 3 = \binom{n-1}{2}$

11.5)

a) Es muss mindestens 3 Mal die 5 vorkommen:

$$\sum_{k=3}^{6} \binom{6}{k} \cdot 4^{6-k}$$

b) Jede Zahl kommt höchstens 2 Mal vor,
mindestens eine Zahl ist doppelt, höchstens
3 versch. doppelte Zahlen
Man kann die Positionen in Äquivalenz-
klassen anhand ihrem zugeordneten Wert
partitionieren

$$\frac{6!}{4! \cdot (1!) \cdot (1!)^4 (2!)^1} \cdot 5^5 + \frac{6!}{2!\,2!\,(1!)^2 (2!)^2} \cdot 5^4 + \frac{6!}{3!\,(2!)^3}\, 5^3$$